ගණිතය

පස්වන ශ්‍රේණිය

මූලික පිරිවෙණ

අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

සියලු ම පෙළපොත් ඉලෙක්ට්‍රොනික් මාධ්‍යයෙන් ලබා ගැනීමට
www.edupub.gov.lk වෙබ් අඩවියට පිවිසෙන්න.

ප්‍රථම මුද්‍රණය 2018
දෙවන මුද්‍රණය 2019
තෙවන මුද්‍රණය 2020

සියලු හිමිකම් ඇවිරිණි.

ISBN 978-955-25-0466-2

අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව විසින්
වාසනාවත්ත පාර, මත්තෙගොඩ, අංක 90 දරන
ස්ථානයෙහි පිහිටි විශ්ව ග්‍රැෆික්ස් (පුද්ගලික) සමාගමෙහි
මුද්‍රණය කරවා ප්‍රකාශයට පත් කරන ලදි.

Published by : Educational Publications Department
Printed by : Vishwa Graphics (Pvt) Ltd.

ශ්‍රී ලංකා ජාතික ගීය

ශ්‍රී ලංකා මාතා

අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා

සුන්දර සිරිබරිනී, සුරැඳි අති සෝබමාන ලංකා

ධාන්‍ය ධනය නෙක මල් පලතුරු පිරි ජය භූමිය රම්‍යා

අපහට සැප සිරි සෙත සදනා ජීවනයේ මාතා

පිළිගනු මැන අප භක්ති පූජා

නමෝ නමෝ මාතා

අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා

ඔබ වේ අප විද්‍යා ඔබ ම ය අප සත්‍යා

ඔබ වේ අප ශක්ති අප හද තුළ භක්ති

ඔබ අප ආලෝකේ අපගේ අනුප්‍රාණේ

ඔබ අප ජීවන වේ අප මුක්තිය ඔබ වේ

නව ජීවන දෙමිනේ නිතින අප පුබුදු කරන් මාතා

ඥාන වීර්ය වඩවමින රැගෙන යනු මැන ජය භූමි කරා

එක මවකගෙ දරු කැල බැවිනා

යමු යමු වී නොපමා

ප්‍රේම වඩා සැම භේද දුරැර ද නමෝ නමෝ මාතා

අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා

අපි වෙමු එක මවකගෙ දරුවෝ
එක නිවසෙහි වෙසෙනා
එක පාටැති එක රුධිරය වේ
අප කය තුළ දුවනා

එබැවිනි අපි වෙමු සොයුරු සොයුරියෝ
එක ලෙස එහි වැඩෙනා
ජීවත් වන අප මෙම නිවසේ
සොඳින සිටිය යුතු වේ

සැමට ම මෙත් කරුණා ගුණෙනී
වෙළී සමගි දමිනී
රන් මිණි මුතු නො ව එය ම ය සැපතා
කිසි කල නොම දිරනා

ආනන්ද සමරකෝන්

පෙරවදන

සියවස් ගණනාවක කීර්තිමත් ඉතිහාසයකට උරුමකම් කියන්නා වූ පිරිවෙන් අධ්‍යාපන සම්ප්‍රදාය වූ කලී සිරිලක අධ්‍යාපනයේ ස්වර්ණමය සලකුණකි. මහින්දාගමනයත් සමඟින් වඩාත් ශිෂ්ට සම්පන්න සංස්කෘතියක් වෙත අප ගමන් කළේ සුවිශේෂ වූ ශාස්ත්‍රීය දියුණුවක් ද අත්පත් කරගනිමිනි. එහිදී භික්ෂු, භික්ෂුණී, උපාසක, උපාසිකා යන සිව්වණක් පිරිස වෙතම ප්‍රභාෂ්වර ශාස්ත්‍රාලෝකය දායාද කළ ප්‍රදීපස්තම්භය වූයේ පිරිවෙනයි.

අපේ සම්භාව්‍ය පිරිවෙන් අධ්‍යාපනය, ත්‍රිවිධ ශාසනයේ ආරක්ෂාව හා අභිවෘද්ධිය වෙනුවෙන් කැපවන සුපසන් යතිපරපුරක් නිර්මාණය කරන අතර සම්භාව්‍ය භාෂා මෙන්ම අනේක ශිල්ප ශාස්ත්‍ර පිරිසිඳ දත් වියතුන් ලොවට දායාද කිරීමෙහිලා මූලික වූ බැව් සිහිපත් කළ යුතු ය. එසේම මෙරට විවිධ උවදුරු පිරි අඳුරු සමයන්හි පිරිහී ගිය පිරිවෙන් අධ්‍යාපනය යළි නඟා සිටුවීමට දිවිහිමියෙන් ඇප කැප වූ, වැලිවිට අසරණ සරණ සරණංකර සඟරජ මාහිමිපාණන්ගේ අපරිමිත සේවාව ද කෘතවේදීත්වයෙන් යුතුව මේ මොහොතේ සිහිපත් කළ යුතු ය.

අතීත සම්භාවනීය අධ්‍යාපන උරුමය ද එකලෙසින් සුරකිමින් නව ලොවට අනුගත වූ පිරිවෙන් විද්‍යස්ථාන නිර්මාණය කිරීමේ කාර්යය වෙත අපි සැම අවතීර්ණ වී සිටින්නෙමු. විශ්ව ගම්මානයෙහි හුදකලා නොවී වර්තමාන පිරිවෙන් ශිෂ්‍ය ගණයා දැනුම, කුසලතා හා ආකල්ප වර්ධනය කරගනිමින් අධ්‍යාපන සයුරෙහි කිමිදෙමින් සිටිනු දැකීම සන්තුෂ්ටිය උපදවන්නකි. විවිධ ගැටලු හේතුවෙන් විධිමත් පාසල් පද්ධතියෙන් බැහැර වූ ඇතැම් සිසුන් ද යළි පිරිවෙන් විදුබිම් වෙත පැමිණ ස්වකීය දිවිමඟ යළි එළිය කරගත් අවස්ථා සඳහා නිදසුන් අපමණ බව සඳහන් කළ යුතු ය. සැමට අධ්‍යාපනය ලබාදීමේ උත්කෘෂ්ට කර්තව්‍යය වෙනුවෙන් පිරිවෙන් විද්‍යස්ථාන ද ඇප කැප වී සිටින බවට එය කදිම සාක්ෂ්‍යයකි.

මෙම පොත් මැනවින් පරිශීලනය කරමින් ඒ ඔස්සේ තව තවත් පුළුල් දැනුම් අවකාශ පිරි ඉසව් වෙත පිවිසෙන්නට ද ඔබ සැමට ඇරයුම් කරමි. මනා ඉගෙනුමක් ලැබූ හා ආධ්‍යාත්මික සුවපත් භාවයෙන් පිරිපුන් සුපසන් සිසු පරපුරක් බිහිවනු දැකීම රජයේ ඒකායන අරමුණයි. ඒ සඳහා ඇප කැපවන්නට හැකිවේවායි සියලු දෙනා වෙත ආශීර්වාද කරමි. මේ සත්කාර්යය වෙනුවෙන් නොමසුරු දායකත්වයක් සැපයූ සියලු පිරිවර වෙත ද මාගේ ප්‍රණාමය පුද කර සිටිමි.

පී. එන්. අයිලප්පෙරුම
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් ජනරාල්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව
ඉසුරුපාය
බත්තරමුල්ල

නියාමනය හා අධීක්ෂණය

පී. එන්. අයිලප්පෙරුම - අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් ජනරාල්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

මෙහෙයවීම

පූජ්‍ය වටිනාපහ සෝමානන්ද හිමි - අධ්‍යාපන අධ්‍යක්ෂ (පිරිවෙන්),
අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය

ඩබ්ලිව්. ඒ. නිර්මලා පියසීලි - අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් (සංවර්ධන)
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

සම්බන්ධීකරණය

ටී.ඩී.සී. කල්හාරි ගුණසේකර - නියෝජ්‍ය කොමසාරිස්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

යූ.එල්.ඩී.ජේ. පද්මසිරි - ගණිතය විෂය උපදේශක(පිරිවෙන්)
අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය

සභාපති

ආචාර්ය ඩබ්ලිව්. අජිත් රවීන්ද්‍ර - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය
ගණිත අධ්‍යනාංශය
විද්‍යාපීඨය, රුහුණු විශ්වවිද්‍යාලය, මාතර

උපදේශකත්වය

කේ. රංජිත් පද්මසිරි - ගණිත අධ්‍යක්ෂ, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව,
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය, මහරගම

සංස්කාරක මණ්ඩලය

සරත් වීරසිංහ - නියෝජ්‍ය අධ්‍යක්ෂ (විශ්‍රාමික)
ටී.ඩී.සී. කල්හාරි ගුණසේකර - සහකාර කොමසාරිස්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

ලේඛක මණ්ඩලය

අනුර ඩී. වීරසිංහ - ගුරු උපදේශක (පිරිවෙන්)
මාතර දිස්ත්‍රික්කය

එස්. ඒ. එස්. ධම්මික කුමාර - ගුරු උපදේශක (පිරිවෙන්)
පොළොන්නරු දිස්ත්‍රික්කය

ටී. ඩී. සුනිල් ශාන්ත - ගුරු උපදේශක (පිරිවෙන්)
ගාල්ල දිස්ත්‍රික්කය

පී. එස්. ඩී. ප්‍රනාන්දු - ගුරු උපදේශක (පිරිවෙන්)
රත්නපුර දිස්ත්‍රික්කය

සෝදුපත් බැලීම

යූ.එල්.ඩී.ජේ. පද්මසිරි - විෂය උපදේශක(පිරිවෙන්)
අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය

භාෂා සංස්කරණය

පූජ්‍ය රඹාවැවේ පාලිත හිමි - සංස්කෘත භාෂා විෂය උපදේශක (පිරිවෙන්)
අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය

පරිගණක අක්ෂර සංයෝජනය සහ පිටු සැකසීම

පී.ඩී. පියුමි හංසිකා - පරිගණක අංශය
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

ඩබ්. ඒ. පූර්ණා ජයමිණී - පරිගණක අංශය
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

පිට කවර නිර්මාණය

ආර්.එම්. රජිත සම්පත් - පරිගණක අංශය
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

පී.ඩී. පියුමි හංසිකා - පරිගණක අංශය
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

පටුන

පිටුව

1. තාත්වික සංඛ්‍යා	1 - 9
2. භාග හා දශම	10 - 19
3. දර්ශක හා ලඝුගණක	20 - 34
4. පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය	35 - 44
5. පරිමාව	45 - 52
6. න්‍යාස	53 - 60
7. සූත්‍ර	61 - 64
8. පයිතගරස් ප්‍රමේයය	65 - 72
9. වෘත්ත චතුරස්‍ර	73 - 79
10. කොටස් වෙළෙඳපොළ	80 - 84
11. වර්ගජ සමීකරණ	85 - 96
12. ප්‍රස්තාර	97 - 112
13. මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය	113 - 122
14. ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත	123 - 142
15. දත්ත නිරූපණය හා අර්ථකථනය I	143 - 147
16. දත්ත නිරූපණය හා අර්ථකථනය II	148 - 160
17. කුලක	161 - 169
18. සම්භාවිතාව	170 - 178
19. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪී	179 - 195
20. ස්පර්ශක	196 - 205
21. ජ්‍යාමිතික නිර්මාණ	206 - 212

1 තාත්වික සංඛ්‍යා

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- පරිමේය සංඛ්‍යා හඳුනා ගැනීමට,
- අපරිමේය සංඛ්‍යා හඳුනා ගැනීමට,

හැකියාව ලැබේ.

1.1 හැඳින්වීම

පෙර ශ්‍රේණිවලදී ඔබ ඉගෙන ගත් විවිධ සංඛ්‍යා පද්ධති පිළිබඳව මතකයට නඟා ගනිමු.

ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා (ℕ)

1, 2, 3, 4 ... යනාදී වශයෙන් ඇති ගණින සංඛ්‍යා ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා වේ.
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

පූර්ණ සංඛ්‍යා

ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා කුලකයට 0 ද ඇතුළත් කළ විට පූර්ණ සංඛ්‍යා කුලකය ලැබේ.
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5 ...\}$

ඉරට්ට සංඛ්‍යා

දෙකෙන් ඉතිරි නැතිව බෙදෙන සංඛ්‍යා ඉරට්ට සංඛ්‍යා වේ. 0 ද ඉරට්ට සංඛ්‍යාවක් ලෙස පිළිගනී.
0, 2, 4, 6, 8 ...

ඔත්තේ සංඛ්‍යා

දෙකෙන් බෙදූ විට 1ක් ඉතිරිවන සංඛ්‍යා ඔත්තේ සංඛ්‍යා ලෙස හඳුන්වයි.
$\{1, 3, 5, 7, 9, 11 ...\}$

ප්‍රථමක සංඛ්‍යා

එකට වඩා විශාල එකිනෙකට වෙනස් සාධක දෙකක් පමණක් ඇති සංඛ්‍යා ප්‍රථමක සංඛ්‍යා වේ.

උදා: $2 = 2 \times 1$ බැවින්, 2 හි සාධක 2 හා 1 පමණි.
$3 = 3 \times 1$ බැවින්, 3 හි සාධක 3 හා 1 පමණි.
$1 = 1 \times 1$ බැවින්, 1 හි සාධක 1 පමණි. (එය ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවක් නොවේ.)

ප්‍රථමක සංඛ්‍යා කුලකය $\{2, 3, 5, 7, 11 ...\}$ වේ.

සංයුක්ත සංඛ්‍යා

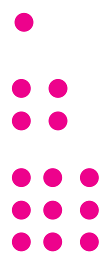
සාධක දෙකකට වැඩියෙන් ඇති සංඛ්‍යා සංයුක්ත සංඛ්‍යා ලෙස හඳුන්වයි. මුල්ම සංයුක්ත සංඛ්‍යාව 4 වේ.

උදා: 4 හි සාධක 1, 2, 4 බැවින්, 4 සංයුක්ත සංඛ්‍යාවකි.
6 හි සාධක 1, 2, 3, 6 බැවින්, 6 සංයුක්ත සංඛ්‍යාවකි.
8 හි සාධක 1, 2, 4, 8 බැවින්, 8 සංයුක්ත සංඛ්‍යාවකි.

1 ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවක් හෝ සංයුක්ත සංඛ්‍යාවක් නොවේ.

වර්ග සංඛ්‍යා (සමචතුරස්‍ර සංඛ්‍යා)

සමචතුරස්‍රයක් සෑදිය හැකි ගණක සංඛ්‍යාවක් මගින් නිරූපණය කළ හැකි සංඛ්‍යා සමචතුරස්‍ර සංඛ්‍යා වේ. එය වර්ග සංඛ්‍යා ලෙස ද හැඳින් වේ.



$\longrightarrow 1^2 = 1$

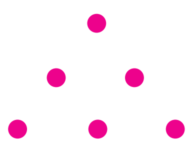
$\longrightarrow 2^2 = 4$

$\longrightarrow 3^2 = 9$

වර්ග සංඛ්‍යා කුලකය = { 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... }

ත්‍රිකෝණ සංඛ්‍යා

ත්‍රිකෝණයක් සෑදිය හැකි ගණක සංඛ්‍යාවකින් නිරූපණය කළ හැකි සංඛ්‍යා ත්‍රිකෝණ සංඛ්‍යා වේ.



$\longrightarrow 1 \longrightarrow 1$

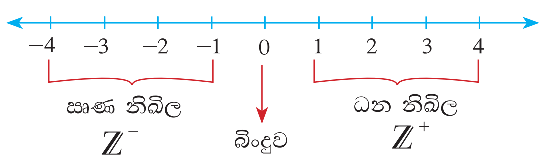
$\longrightarrow 1 + 2 \longrightarrow 3$

$\longrightarrow 1 + 2 + 3 \longrightarrow 6$

ත්‍රිකෝණ සංඛ්‍යා කුලකය = { 1, 3, 6, 10, 15, ... }

නිඛිල $\mathbb{Z}$

0 ඇතුළු ධන සහ ඍණ පූර්ණ සංඛ්‍යා නිඛිල ලෙස හඳුන්වනු ලැබේ. සංඛ්‍යා රේඛාවේ "0" ට දකුණු පස ඇති පූර්ණ සංඛ්‍යා + නිඛිල වන අතර 0ට වමත් පස ඇති පූර්ණ සංඛ්‍යා – නිඛිල වේ.



$\mathbb{Z} = \{ ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ... \}$

$\mathbb{Z}^- = \{ ... -3, -2, -1 \}$

$\mathbb{Z}^+ = \{ 1, 2, 3 ... \}$

පරිමේය සංඛ්‍යා ($\mathbb{Q}$)

$\dfrac{p}{q}$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි සියලු ම සංඛ්‍යා පරිමේය සංඛ්‍යා වේ. p සහ q නිඛිල ද $q \neq 0$ ද වේ. ''නිඛිල සංඛ්‍යා කුලකය'' පරිමේය සංඛ්‍යාවලට අයත් ය.

පරිමේය සංඛ්‍යා සඳහා කුලක අංකනයක් පහත දැක්වේ.

$$\mathbb{Q} = \{ x : x = \frac{p}{q} \,;\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \}$$

උදා: $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, 5, -3, 0, 1.2$

මෙහි $5 = \frac{10}{2}$ ලෙසින් ද, ප්‍රකාශ කළ හැකි ය. $0 = \frac{0}{7}$ ලෙස ද ප්‍රකාශ කළ හැකි ය. නිඛිල සංඛ්‍යා කුලකය ද පරිමේය සංඛ්‍යා කුලකයේ උපකුලකයක් වේ. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

භාග දශම බවට පත් කිරීමේදී අන්ත දශම හා සමාවර්ත දශම යනුවෙන් ආකාර දෙකකට වෙන් කර ගත හැකි ය.

අන්ත දශම: පහත එක් එක් උදාහරණය සලකමු.

උදා : (i) $\frac{1}{2} = 0.5000...$ (ii) $\frac{3}{4} = 0.75000...$ (iii) $\frac{1}{4} = 0.25000...$

(iv) $\frac{2}{5} = 0.4000...$ (v) $\frac{1}{8} = 0.125000...$

මෙහි,

- $\frac{1}{2}$ හා $\frac{2}{5}$ හි දශම නිරූපණයෙහි 0 සංඛ්‍යාංකය දෙවන දශම ස්ථානයේ සිට සමාවර්තනය වේ. (සමාවර්තනය වීම යනු සම දුරින් නැවත නැවත යෙදීමයි.)
- $\frac{3}{4}$ හා $\frac{1}{4}$ හි දශම නිරූපණයේ 0 සංඛ්‍යාංකය තුන්වන දශම ස්ථානයේ සිට සමාවර්තනය වේ.
- $\frac{1}{8}$ හි දශම නිරූපණයේ 0 සංඛ්‍යාංකය සිව්වන දශම ස්ථානයේ සිට සමාවර්තනය වේ.

මෙසේ සමාවර්තනය වන කොටස 0 නම් එවැනි දශම **අන්ත දශම** ලෙස හැඳින්වේ.

සමාවර්ත දශම: පහත එක් එක් උදාහරණ සලකමු.

උදා : (i) $\frac{1}{3} = 0.333...$ (ii) $\frac{5}{6} = 0.8333...$ (iii) $\frac{2}{7} = 0.285714285714...$

මේවායේ සමාවර්ත වන කොටස 0 නොවේ. එලෙස සමාවර්ත වන කොටස 0 නොවන දශම **සමාවර්ත දශම** ලෙස හැඳින්වේ. සමාවර්ත දශම මෙසේ කැටිකර දක්වනු ලැබේ.

උදා : $0.333... \longrightarrow 0.\dot{3}$ $\quad 0.83333... \longrightarrow 0.8\dot{3}$

$0.565656... \longrightarrow 0.\dot{5}\dot{6}$ $\quad 0.285714285714... \longrightarrow 0.\dot{2}8571\dot{4}$

පරිමේය සංඛ්‍යාවක් හැමවිට ම සමාවර්ත දශමයක් හෝ අන්ත දශමයක් වේ.

1.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන දශම, අන්ත දශම ද සමාවර්ත දශම ද යන්න සඳහන් කරන්න.

(i) 0.25 (ii) 7.364 (iii) 1.3666... (iv) 0.878787...

(v) 1.6666 ... (vi) 7.681681 ... (vii) 0.101101 ... (viii) 13.875642

1.2 හරය පරීක්ෂාවෙන් අන්ත දශම හා සමාවර්ත දශම හඳුනා ගැනීම

මෙහි දී භාග සංඛ්‍යාවේ හරය ලෙස, 2 හෝ 2හි බල එනම්, 2, 4, 8, 16, ... ද, 5 හෝ 10හි බල එනම්, 5, 10, 25, 100, ... වැනි සංඛ්‍යා යෙදුන විට ඒවා මගින් අන්ත දශම ලැබේ. ඉතිරි සංඛ්‍යා හරය ලෙස ඇති විට සමාවර්ත දශම ලැබේ.

උදා:

$\frac{1}{4}$ → අන්ත දශම

$\frac{3}{10}$ → අන්ත දශම

$\frac{2}{5}$ → අන්ත දශම

$\frac{7}{8}$ → අන්ත දශම

$\frac{2}{3}$ → සමාවර්ත දශම

$\frac{1}{7}$ → සමාවර්ත දශම

$\frac{5}{9}$ → සමාවර්ත දශම

$1\frac{1}{6}$ → සමාවර්ත දශම

1.2 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන පරිමේය සංඛ්‍යා දශම සංඛ්‍යා ලෙස ලියන්න. ඒවා අන්ත දශම ද සමාවර්ත දශම ද යන්න දක්වන්න.

(i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{2}{3}$ (iv) $\frac{5}{9}$ (v) $\frac{4}{7}$ (vi) $\frac{5}{11}$

(vii) $\frac{3}{8}$ (viii) $\frac{5}{6}$ (ix) $\frac{9}{100}$ (x) $\frac{17}{12}$ (xi) $1\frac{1}{2}$

2. පහත දී ඇති සංඛ්‍යා අතරින් නිඛිල, අන්ත දශම හා සමාවර්ත දශම තෝරා ලියන්න.

	සංඛ්‍යාව	නිඛිල / අන්ත දශම / සමාවර්ත දශම
(i)	–3	
(ii)	1.64	
(iii)	0.303030	
(iv)	0.5	
(v)	2.653653	
(vi)	$0.\dot{1}\dot{7}$	
(vii)	1000	
(viii)	$1.\dot{7}3\dot{2}$	

1.3 අපරිමේය සංඛ්‍යා ($\mathbb{Q}'$)

$\frac{p}{q}$ වැනි නිඛිල දෙකක අනුපාතයක් ලෙස දැක්විය නොහැකි සංඛ්‍යා ද අන්ත දශම හෝ සමාවර්ත දශම හෝ නොවන සංඛ්‍යා ද අපරිමේය සංඛ්‍යා වේ. අපරිමේය සංඛ්‍යා සමාවර්ත නොවන අනන්ත දශම ලෙස ද හඳුන්වයි. පූර්ණ වර්ග නොවන සංඛ්‍යාවල වර්ගමූල බොහෝ විට අපරිමේය සංඛ්‍යා වේ.

නිදසුන 1

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{13}$ වැනි මූල සංඛ්‍යා සියල්ල අපරිමේය වේ.

$\sqrt{2} = 1.4142 ...$
$\sqrt{3} = 1.73205 ...$
$\sqrt{5} = 2.2360 ...$
$\sqrt{8} = 2.8284 ...$
$\sqrt{13} = 3.6055 ...$
$\frac{22}{7} = 3.\dot{1}4285\dot{7}$
$\pi = 3.14159265358 ...$

- π අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් වුව ද $\frac{22}{7}$ අපරිමේය නොවේ. එය සමාවර්තයකි.

තාත්වික සංඛ්‍යා ($\mathbb{R}$)

ඔබ ඉගෙන ගත් සියලුම පරිමේය සංඛ්‍යා සහ අපරිමේය සංඛ්‍යා සියල්ල තාත්වික සංඛ්‍යා ලෙස හැඳින්වේ. $\mathbb{R}$ මගින් එය සංකේතවත් කරනු ලැබේ.

කරණි

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{7}$ වැනි අපරිමේය සංඛ්‍යා කරණි ලෙස නම් කරයි. එහෙත් $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ වැනි ඒවා පමණක් මෙම කොටසේ දී සාකච්ඡා කෙරේ. $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$ වැනි පූර්ණ වර්ග වන සංඛ්‍යා **කරණි** ලෙස නම් කරනු නොලැබේ.

$\sqrt{8}$ වැනි කරණි පරිමේය සංඛ්‍යාවකත් අපරිමේය සංඛ්‍යාවකත් ගුණිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි ය. මෙවැනි කරණි **අබිල කරණි** ලෙස නම් කරයි. අබිල කරණිවලට නිදසුන් කිහිපයක් පහත දැක්වේ.

$\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{48}$ මේවා එක එකක් සුළු කර දක්වමු.

නිදසුන 2

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2}$
$= 2\sqrt{2}$

(පළමුව 8 එක් සාධකයක ද අනෙක් සාධකය පූර්ණ වර්ග සංඛ්‍යාවක් ද වන පරිදි සාධක දෙකක ගුණිතයක් සේ ලියන්න.)

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ලෙස පරිමේය සංඛ්‍යාවකත් අපරිමේය සංඛ්‍යාවකත් ගුණිතයක් ලෙස ලිවිය හැකි බැවින්, $\sqrt{8}$ අබිල කරණියකි.

නිදසුන 3

$\sqrt{18}$ අබිල කරණිය සුළු කර දක්වන්න.

$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2}$

$= \sqrt{9} \times \sqrt{2}$

$\sqrt{18} = 3 \times \sqrt{2}$ ($\sqrt{9} = 3$ නිසා)

$= 3\sqrt{2}$

නිදසුන 4

$\sqrt{48}$ සුළු කර දක්වන්න.

$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3}$

$= \sqrt{16} \times \sqrt{3}$

$= 4\sqrt{3}$

නිදසුන 5

$3\sqrt{5}$ යන කරණිය, අබිල කරණියක් බවට පත් කරන්න.

$3\sqrt{5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5}$

$= \sqrt{9 \times 5}$

$= \sqrt{45}$

$\sqrt{45}$, අබිල කරණියකි.

නිදසුන 6

$2\sqrt{6}$ අබිල කරණියක් බවට පත් කරන්න.

$2\sqrt{6} = 2 \times \sqrt{6}$

$= \sqrt{4} \times \sqrt{6}$

$= \sqrt{4 \times 6}$

$= \sqrt{24}$

$\sqrt{24}$, අබිල කරණියකි.

1.4 කරණි එකතු කිරීම, අඩු කිරීම

නිදසුන 1

$2\sqrt{2} + \sqrt{32} + \sqrt{98} - \sqrt{50}$

මෙහි දී වීජ පද එකතු කිරීම හා අඩු කිරීම කළ ආකාරයට ම සජාතීය පද එකතු කිරීම හා අඩු කිරීම කරනු ලැබේ. මුලින් ම ගැටලුවේ අබිල කරණි, සුළු කිරීම කළ යුතු ය.

$2\sqrt{2} + \sqrt{16 \times 2} + \sqrt{49 \times 2} - \sqrt{25 \times 2}$

$= 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

$= 13\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

$= 8\sqrt{2}$

සටහන

$\sqrt{2} = \sqrt{2}$ ඒවා එකකි.

$5\sqrt{2} = \sqrt{2}$ ඒවා 5කි.

නිදසුන 2

$5\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$

$= 5\sqrt{3} + \sqrt{9 \times 3} - \sqrt{16 \times 3}$

$= 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$

$= 4\sqrt{3}$

1.5 හරය පරිමේය කිරීම

$\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ සළකමු.

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 2} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$

$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5$

ඕනෑ ම අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් එම අපරිමේය සංඛ්‍යාවෙන් ගුණ කළ විට පරිමේය සංඛ්‍යාවක් ලැබේ.

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ යන කරණිය සලකමු. මෙහි හරය අපරිමේය සංඛ්‍යාවකි. එම හරය පරිමේය සංඛ්‍යාවක් කර ගැනීම මෙලෙස විස්තර කළ හැකි ය.

තුල්‍ය භාග දැනුම අනුව,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

නිදසුන 1

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ හරය පරිමේය කරන්න.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

නිදසුන 2

$\frac{2}{\sqrt{5}}$ හරය පරිමේය කරන්න.

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

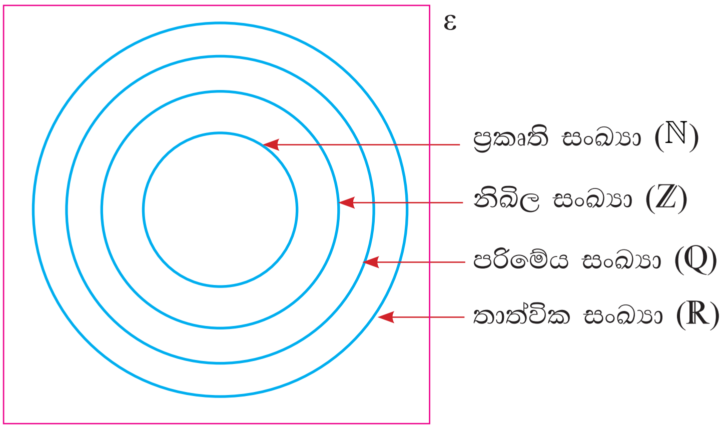
තාත්වික සංඛ්‍යා ($\mathbb{R}$)

- පරිමේය සංඛ්‍යා ($\mathbb{Q}$)
  - නිඛිල ($\mathbb{Z}$)
  - භාග (දශම)
    - අන්ත දශම
    - සමාවර්ත දශම
- අපරිමේය සංඛ්‍යා ($\mathbb{Q}'$)
  - කරණී
    - අඛිල කරණී
    - අඛිල නොවන කරණී

තව ද කුලක අංකනයෙන්

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

ඉහත සංඛ්‍යා කුලක නිරූපණයක් ලෙස පහත දැක්වේ.



1.3 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන අඛිල කරණී සුළුකර දක්වන්න.

(i) $\sqrt{32}$ (ii) $\sqrt{44}$ (iii) $\sqrt{50}$ (iv) $\sqrt{200}$

(v) $\sqrt{40}$ (vi) $\sqrt{405}$

2. පහත ඒවා අඛිල කරණී බවට පත් කරන්න.

(i) $3\sqrt{3}$ (ii) $2\sqrt{5}$ (iii) $4\sqrt{2}$ (iv) $4\sqrt{7}$

(v) $11\sqrt{2}$ (vi) $4\sqrt{3}$ (vii) $3\sqrt{11}$ (viii) $3\sqrt{23}$

3. පහත දී ඇති කරණි සුළු කරන්න.

(i) $7\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{2} + 7\sqrt{2} + \sqrt{32}$

(iii) $\sqrt{48} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$ (iv) $10\sqrt{2} - \sqrt{98} - \sqrt{2}$

(v) $\sqrt{75} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$ (vi) $\sqrt{90} - \sqrt{40}$

4. හරය පරිමේය කර දක්වන්න.

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ (iii) $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ (iv) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

(v) $\dfrac{3}{4\sqrt{2}}$ (vi) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

සාරාංශය

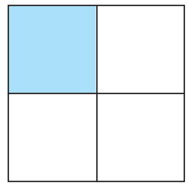
- $\dfrac{p}{q}$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි සියලු ම සංඛ්‍යා පරිමේය සංඛ්‍යා වේ. p සහ q නිඛිල ද $q \neq 0$ ද වේ.
- පරිමේය සංඛ්‍යාවක් හැමවිට ම සමාවර්ත දශමයක් හෝ අන්ත දශමයක් විය හැකි ය.
- $\dfrac{p}{q}$ වැනි නිඛිල දෙකක අනුපාතයක් ලෙස දැක්විය නොහැකි සංඛ්‍යා ද අන්ත දශම හෝ සමාවර්ත දශම නොවන සංඛ්‍යා ද අපරිමේය සංඛ්‍යා වේ.

2 භාග හා දශම

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- භාග භාවිත ගැටලු විසඳීමට,
- දශම භාවිත ගැටලු විසඳීමට

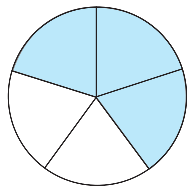
හැකියාව ලැබේ.

2.1 හැඳින්වීම



1 රූපය

1 රූපය සමාන කොටස් හතරකට බෙදා ඇත. මුළු රූපය ඒකකයක් ලෙස ගත් විට අඳුරු කර ඇති කොටස මුළු රූපයෙන් භාගයක් ලෙස ද එම භාගය මුළු රූපයෙන් $\frac{1}{4}$ ලෙස ද ඉගෙන ඇත්තෙමු. මෙහි 4 හරය ද 1 ලවය ද වේ.



2 රූපය

ඒ අනුව, 2 රූපයේ අඳුරු කර ඇති කොටස මුළු රූපයෙන් $\frac{3}{5}$ ක් වේ. මෙහි හරය 5 ද ලවය 3 ද වේ. මේ ආකාරයේ හරයට වඩා ලවය කුඩා වූ භාග තත්‍ය භාග (නියම භාග) ලෙස හැඳින්වේ. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ වැනි ලවය 1 වූ තත්‍ය භාග, ඒකක භාග ලෙස ද හඳුන්වමු.

භාගයක ලවය හා හරය එකම සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීමෙන් හෝ බෙදීමෙන් (0ට අසමාන) තුල්‍ය භාග ලබා ගත හැකි ය.

නිදසුන 1

ලවය හා හරය එකම සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීමෙන් $\frac{2}{5}$ භාගයට තුල්‍ය භාග ලියන්න.

$\frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10}$, $\frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$, $\frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}$

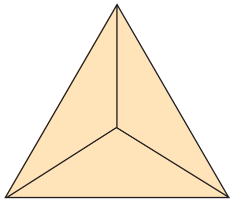
$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20}$

නිදසුන 2

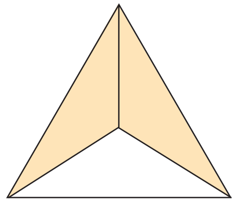
$\frac{12}{24}$ භාගයේ ලවය හා හරය එකම සංඛ්‍යාවෙන් බෙදීමෙන් තුල්‍ය භාග 3ක් ලියන්න.

- $\frac{12 \div 2}{24 \div 2} = \frac{6}{12}$
- $\frac{12 \div 3}{24 \div 3} = \frac{4}{8}$
- $\frac{12 \div 4}{24 \div 4} = \frac{3}{6}$

$\therefore \frac{12}{24} = \frac{6}{12} = \frac{4}{8} = \frac{3}{6}$



1



$\frac{2}{3}$

මෙම රූපයේ දැක්වෙන ප්‍රමාණය විස්තර කර ගනිමු. එය $1\frac{2}{3}$ බව දනිමු. මෙහි දී එක් එක් ත්‍රිකෝණය ඒකකයක් ලෙස සැළකූ විට,

- 1 යනු $\frac{1}{3}$ ඒවා 3කි. එනම් $\frac{3}{3}$ කි.
- $\frac{2}{3}$ යනු $\frac{1}{3}$ ඒවා 2කි. එනම් $\frac{2}{3}$ කි.

මේ අනුව අඳුරු කර ඇති කොටස $\frac{1}{3}$ ඒවා 5කි. එනම් $\frac{5}{3}$ වේ.

එකම ප්‍රමාණයක් ආකාර දෙකකට විස්තර කර ඇති නමුත් ඒවා සමාන වේ. මේ අනුව, $1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ වේ.

භාගයක් $1\frac{2}{3}$ ආකාරයට ලියූ විට එය මිශ්‍ර සංඛ්‍යාවක් ලෙස හැඳින්වේ. එය $\frac{5}{3}$ ආකාරයට ලියා ඇති විට විෂම භාගයක් වේ. මේ ආකාරයට,

- $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
- $2\frac{4}{5} = \frac{14}{5}$

- **භාග එකතු කිරීම ද, භාග අඩු කිරීම ද මීට පෙර ඉගෙන ඇත. ඒ පිළිබඳ නිදසුන් කීපයක් සිහිපත් කර ගනිමු.**

නිදසුන 3

$\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$ සුළු කරන්න.

$\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$

$= \frac{1+3}{5}$

$= \frac{4}{5}$

නිදසුන 4

$\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$ සුළු කරන්න.

$\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

$= \frac{2 \times 2}{3 \times 2} - \frac{1 \times 3}{2 \times 3}$

$= \frac{4}{6} - \frac{3}{6}$

$= \frac{1}{6}$

නිදසුන 5

$1\frac{2}{5} + 2\frac{3}{10} - 1\frac{1}{2}$ සුළු කරන්න.

$1\frac{2}{5} + 2\frac{3}{10} - 1\frac{1}{2}$

$= (1 + 2 - 1) + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{2}$

$= (1 + 2 - 1) + \frac{2 \times 2}{5 \times 2} + \frac{3}{10} - \frac{1 \times 5}{2 \times 5}$

$= 2 + \frac{4}{10} + \frac{3}{10} - \frac{5}{10}$

$= 2 + \frac{(4 + 3 - 5)}{10}$

$= 2\frac{2}{10}$

$= 2\frac{1}{5}$

- **භාග ගුණ කිරීම නිදසුන් මගින් සිහිපත් කර ගනිමු.**

නිදසුන 6

$\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$ සුළු කරන්න.

$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$

$= \frac{2}{15}$ (හරය වෙනම ද ලවය වෙනම ද ගුණ කර ඇත.)

නිදසුන 7

$2\frac{1}{2} \times 1\frac{2}{5}$ සුළු කරන්න.

$2\frac{1}{2} \times 1\frac{2}{5}$

$= \frac{\cancel{5}^{1}}{2} \times \frac{7}{\cancel{5}_{1}}$ (මිශ්‍ර සංඛ්‍යා විෂම භාග ලෙස ලිවීමෙන්)

$= \frac{7}{2}$

$= 3\frac{1}{2}$

- **සංඛ්‍යාවක පරස්පරය විමසමු.**

$\frac{2}{3}$ හි පරස්පරය $\frac{3}{2}$ බව අපි දනිමු. එනම් $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$ වන බැවිනි.

තව ද $\frac{2}{5}$ පරස්පරය $\frac{5}{2}$ ද, $\frac{3}{8}$ හි පරස්පරය $\frac{8}{3}$ ද යනාදී ආකාරයට වේ.

- **භාග බෙදීම නිදසුන් මගින් සිහිපත් කර ගනිමු.**

ඒ සඳහා $\frac{3}{7} \div \frac{2}{3}$ විමසා බලමු.

මෙහිදී භාගයක් තවත් භාගයකින් බෙදීමේදී දෙවන භාගයේ පරස්පරයෙන් ගුණ කිරීම සිදු කරන බව මීට පෙර ඉගෙන ඇත. ඒ අනුව,

$$\frac{3}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{14}$$

නිදසුන 8

$1\frac{2}{5} \div 2\frac{1}{3}$ සුළු කරන්න.

$1\frac{2}{5} \div 2\frac{1}{3}$

$= \frac{7}{5} \div \frac{7}{3}$ (මිශ්‍ර සංඛ්‍යා විෂම භාග ලෙස ලිවීමෙන්)

$= \frac{\cancel{7}^{1}}{5} \times \frac{3}{\cancel{7}_{1}}$ (පරස්පරයෙන් ගුණ කිරීමෙන්)

$= \frac{3}{5}$

$\frac{4}{5}$ න් $\frac{1}{2}$ක ප්‍රමාණය කොපමණදැයි විමසා බලමු. මෙහිදී "න්" වෙනුවට ගුණ කිරීම දැක්වෙන බව ඔබ ඉගෙන ඇත. ඒ අනුව, $\frac{4}{5}$ න් $\frac{1}{2} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\cancel{4}^{2}}{5} \times \frac{1}{\cancel{2}_{1}} = \frac{2}{5}$

$\therefore \frac{4}{5}$ න් $\frac{1}{2} = \frac{2}{5}$

නිදසුන 9

නිමල්ගේ මාසික වැටුප රු. 20 000ක් විය. ඉන් $\frac{2}{5}$ ක් ආහාර සඳහා වැය වුණි නම් නිමල් ආහාර සඳහා වැය කළ මුදල කොපමණ ද?

ආහාර සඳහා වැය කළ මුදල $=$ රු. 20 000 න් $\frac{2}{5}$

$=$ රු. $\cancel{20\,000}^{4\,000} \times \frac{2}{\cancel{5}_{1}}$

$=$ රු. 8000

- **භාග සුළු කිරීමේදී ගණිත කර්ම සිදු කරන අනුපිළිවෙළ පහත පරිදි බව ඔබ ඉගෙන ඇත.**
  - වරහන් තුළ ඇති කොටස් - B - Brackets
  - "න්" සම්බන්ධ කොටස් හෝ බල - O - Of / Order
  - බෙදීම - D - Division
  - ගුණ කිරීම - M - Multiplication
  - එකතු කිරීම - A - Addition
  - අඩු කිරීම - S - Subtraction

භාග සුළු කිරීම පිළිබඳ මෙතෙක් උගත් කරුණු සිහිපත් කර ගනිමු.

නිදසුන 10

$(2\frac{1}{2} + 1\frac{2}{3} - 2\frac{5}{6})$ න් $(1\frac{3}{4} \div \frac{2}{3})$ සුළු කරන්න.

$(2\frac{1}{2} + 1\frac{2}{3} - 2\frac{5}{6})$ න් $(1\frac{3}{4} \div \frac{2}{3})$

$= (\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{17}{6})$ න් $(\frac{7}{4} \div \frac{2}{3})$

$= (\frac{5 \times 3}{2 \times 3} + \frac{5 \times 2}{3 \times 2} - \frac{17}{6})$ න් $(\frac{7}{4} \div \frac{2}{3})$

$= (\frac{15}{6} + \frac{10}{6} - \frac{17}{6})$ න් $(\frac{7}{4} \times \frac{3}{2})$

$= (\frac{15 + 10 - 17}{6})$ න් $\frac{21}{8}$

$= \frac{8}{6}$ න් $\frac{21}{8}$

$= \frac{\cancel{8}^{1}}{\cancel{6}_{2}} \times \frac{\cancel{21}^{7}}{\cancel{8}_{1}}$

$= \frac{7}{2} \quad = 3\frac{1}{2}$

නිදසුන 11

පියෙක් තම ඉඩමෙන් $\frac{2}{3}$ ක් පුතාට ද ඉතිරි ප්‍රමාණයෙන් $\frac{1}{2}$ ක් දියණියට ද දෙන ලදි. පුතාට හා දියණියට දුන් පසු ඉතිරි කොටසේ ගම්මිරිස් වගා කරන ලදි.

(i) දියණියට දුන් කොටස මුළු ඉඩමෙන් කුමන භාගයක් ද?

(ii) ගම්මිරිස් වගා කළ කොටස මුළු ඉඩමෙන් කුමන භාගයක් ද?

(i) පුතාට දුන් කොටස මුළු ඉඩමෙන් භාගයක් ලෙස $= \frac{2}{3}$

ඉතිරි කොටස මුළු ඉඩමෙන් භාගයක් ලෙස $= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

දියණියට දුන් කොටස මුළු ඉඩමෙන් භාගයක් ලෙස $= \frac{1}{3}$ න් $\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

(ii) පුතාට හා දියණියට දුන් කොටස මුළු ඉඩමෙන් භාගයක් ලෙස $= \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$

$= \frac{4}{6} + \frac{1}{6}$

$= \frac{5}{6}$

ගම්මිරිස් වගා කළ කොටස මුළු ඉඩමෙන් භාගයක් ලෙස $= 1 - \frac{5}{6}$

$= \frac{1}{6}$

2.1 අභ්‍යාසය

1. පහත එක් එක් භාගයට තුල්‍ය භාග දෙක බැගින් ලියන්න.

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{8}{12}$ (iv) $\frac{12}{18}$

2. පහත මිශ්‍ර සංඛ්‍යා විෂම භාග ලෙස ලියන්න.

(i) $1\frac{1}{2}$ (ii) $2\frac{2}{3}$ (iii) $5\frac{1}{4}$ (iv) $1\frac{7}{12}$

3. පහත දැක්වෙන විෂම භාග, මිශ්‍ර සංඛ්‍යා ලෙස ලියන්න.

(i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{5}{3}$ (iii) $\frac{11}{7}$ (iv) $\frac{18}{5}$

4. සුළු කරන්න.

(i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (ii) $1\frac{3}{4} - 1\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$ (iii) $\frac{3}{5}$ න් $\frac{1}{6}$ (iv) $(\frac{3}{4} - \frac{1}{2})$ න් $\frac{2}{3}$

5. $(1\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) \div 2\frac{1}{3}$ සුළු කරන්න.

6. $(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}) \times (1\frac{1}{4} - \frac{1}{2})$ සුළු කරන්න.

7. මිනිසෙක් තම වැටුපෙන් $\frac{3}{7}$ක් ආහාර සඳහා වැය කරයි. ඉතිරියෙන් අඩක් තම මවට ලබා දෙයි.
   (i) ආහාර සඳහා වැය කළ පසු ඉතිරි මුදල මුළු වැටුපෙන් කවර භාගයක් ද?
   (ii) ඔහු අත ඉතිරිය මුළු වැටුපෙන් කවර භාගයක් ද?

8. කමල් මිල දී ගත් අඹ තොගයකින් $\frac{1}{8}$ක් නරක් වී තිබිණි. නරක් නොවූ කොටසින් $\frac{1}{7}$ක් අමු අඹ විය. ඉන් නරක් නොවූ ඉදුණු අඹ විකුණන ලදි.
   (i) නරක් නොවූ අඹ ප්‍රමාණය මුළු අඹ තොගයෙන් කවර භාගයක් ද?
   (ii) විකුණු අඹ ප්‍රමාණය මුළු අඹ තොගයෙන් කවර භාගයක් ද?
   (iii) ඇය මිලට ගත් අඹ තොගයේ ගෙඩි 400ක් තිබුණි නම් නරක් නොවූ ඉදුණු අඹ ගෙඩියක් රු. 10 බැගින් විකුණා ලැබූ මුදල කොපමණ ද?

2.2 දශම

ඒකකයක් සමාන කොටස් 10ට බෙදා ඉන් කොටසක් දශම එකක් ලෙස ඉගෙන ඇත්තෙමු.

$\rightarrow \frac{1}{10} = 0.1$

$\frac{1}{10} = 0.1$ ද

$\frac{1}{100} = 0.01$ ද

$\frac{1}{1000} = 0.001$ ද ලෙස ඉගෙන ඇත්තෙමු.

මේ අනුව,

- $\frac{3}{10} = 0.3$
- $\frac{25}{100} = 0.25$
- $\frac{75}{1000} = 0.075$ වේ.

මෙලෙසින් භාගයක් දශමයක් ලෙස දැක්විය හැකි ය.

- $\frac{7}{10} = 0.7$
- $\frac{2}{100} = 0.02$
- $\frac{3}{1000} = 0.003$
- $1\frac{5}{10} = 1.5$
- $\frac{67}{100} = 0.67$
- $1\frac{51}{1000} = 1.051$
- $1\frac{91}{100} = 1.91$
- $1\frac{125}{1000} = 1.125$

තව ද,

- $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0.4$
- $\frac{7}{25} = \frac{28}{100} = 0.28$
- $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{15}{10} = 1\frac{5}{10} = 1.5$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

දශම, භාග ලෙස ද දැක්විය හැකි ය. එනම්,

$0.2 = \frac{2}{10}$ ද $0.53 = \frac{53}{100}$ ද, $1.254 = 1\frac{254}{1000}$ ද ලෙස වේ.

- **දශම සංඛ්‍යා එකතු කිරීම ද අඩු කිරීම ද නිදසුන් මගින් පැහැදිලි කර ගනිමු.**

නිදසුන 1

3.52 + 18.3 අගය සොයන්න.

$$\begin{array}{r} 3.52 \\ +\ 18.30 \\ \hline 21.82 \\ \hline\hline \end{array}$$

නිදසුන 2

13.7 − 5.82 අගය සොයන්න.

$$\begin{array}{r} 13.70 \\ -\ 5.82 \\ \hline 7.88 \\ \hline\hline \end{array}$$

නිදසුන 3

පහන් පූජාවක් සඳහා නිමල් පොල්තෙල් 5.5 l ද කමල් 2.25 l ද ගෙන එන ලදි.

(i) දෙදෙනා ම ගෙන එන ලද පොල්තෙල් ප්‍රමාණය ලීටර කොපමණ ද?

(ii) ඉන් 6.5 l ප්‍රයෝජනයට ගන්නා ලද නම්, ඉතිරි වූ ප්‍රමාණය ලීටර කොපමණ ද?

(i) දෙදෙනා ම ගෙන එන ලද පොල්තෙල් ප්‍රමාණය (l) =

$$\begin{array}{r} 5.50 \\ +\ 2.25 \\ \hline 7.75 \\ \hline\hline \end{array}$$

(ii) ඉතිරි වූ පොල්තෙල් ප්‍රමාණය (l) =

$$\begin{array}{r} 7.75 \\ -\ 6.50 \\ \hline 1.25 \\ \hline\hline \end{array}$$

- දශම සංඛ්‍යා ගුණ කිරීම නිදසුන් මගින් සිහිපත් කර ගනිමු.

නිදසුන 4

1.25×3 අගය සොයන්න.

$$\begin{array}{r} 1.25 \\ \times \quad 3 \\ \hline 3.75 \\ \hline \hline \end{array}$$

(දශම නොසළකා ගුණ කර පිළිතුරේ දී දශම වෙන් කර ගැනීම පහසු වේ.)

නිදසුන 5

2.31×1.7 අගය සොයන්න.

$$\begin{array}{r} 2.31 \\ \times \quad 1.7 \\ \hline 1617 \\ 231 \\ \hline 3.927 \\ \hline \hline \end{array}$$

නිදසුන 6

සෘජුකෝණාස්‍රාකාර මල් පාත්තියක දිග 3.5 m ද පළල 1.7 m ද වේ. එහි වර්ගඵලය වර්ගමීටර කොපමණ ද?

වර්ගඵලය (වර්ගමීටර) $= 3.5 \times 1.7$

$= 5.95 \text{ m}^2$

$$\begin{array}{r} 3.5 \\ \times \quad 1.7 \\ \hline 245 \\ 35 \\ \hline 5.95 \\ \hline \hline \end{array}$$

- දශම සංඛ්‍යා බෙදීම ද නිදසුන් මගින් සිහිපත් කර ගනිමු.

නිදසුන 7

$14.7 \div 3$ අගය සොයන්න.

$$\begin{array}{r|l} & 4.9 \\ 3 & 14.7 \\ & 12 \\ \hline & 27 \\ & 27 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$14.7 \div 3 = 4.9$

නිදසුන 8

$9.66 \div 2.3$ අගය සොයන්න.

$\dfrac{9.66 \times 10}{2.3 \times 10}$ (හරය පූර්ණ සංඛ්‍යාවක් කර ගැනීම සඳහා)

$= \dfrac{96.6}{23}$

$= 4.2$

$$\begin{array}{r|l} & 4.2 \\ 23 & 96.6 \\ & 92 \\ \hline & 46 \\ & 46 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$9.66 \div 2.3 = 4.2$

නිදසුන 9

12.5 m දිග පයිප්පයකින් 2.5 m දිග කොඩි කණු කීයක් කපා ගත හැකි ද?

කපා ගත හැකි කොඩි කණු ගණන $= 12.5 \div 2.5$

$= 5$

$\dfrac{12.5}{2.5}$

$= \dfrac{12.5 \times 10}{2.5 \times 10}$

$= \dfrac{125}{25}$

$= 5$

දශම පිළිබඳ ව මෙතෙක් උගත් කරුණු සිහිපත් කර ගැනීමට පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

2.2 අභ්‍යාසය

1. (i) $1.23 + 3.7 + 4.325$ (ii) $0.75 + 7.5 + 75$
   (iii) $0.01 + 0.001 + 0.010$ (iv) $1.751 + 17.51 + 175.1 + 1751$
   (v) $0.005 + 0.50 + 5.05 + 50.5$

2. (i) $7.43 - 2.51$ (ii) $3.1 - 1.976$ (iii) $5 - 1.7526$
   (iv) $17.2 - 7.5006$ (v) $17.52 - 6.8971$

3. (i) $3.51 + 1\frac{7}{10} - 4\frac{356}{1000}$ (ii) $\frac{1}{2} + 1.7462 + \frac{957}{100} - 6.52$
   (iii) $2\frac{1}{2} - \frac{345}{1000} + 1\frac{3}{4} - 1$ (iv) $3.14 - 1.7251 + 7.7 - 2.3$
   (v) $7.1 - 2.56 - 1.473 - 2.652$

4. (i) $\begin{array}{r} 2.512 \\ \times\ 2.3 \\ \hline \end{array}$ (ii) $\begin{array}{r} 3.465 \\ \times\ 3.47 \\ \hline \end{array}$ (iii) $\begin{array}{r} 0.010 \\ \times\ 0.01 \\ \hline \end{array}$ (iv) $\begin{array}{r} 2.532 \\ \times\ 100 \\ \hline \end{array}$

5. (i) $\frac{2.5}{5}$ (ii) $\frac{2.25}{1.5}$ (iii) $\frac{5}{1.25}$ (iv) $\frac{0.25}{0.5}$ (v) $\frac{0.5}{100}$

6. (i) $(2.3 + 1.47) - 0.345$ (ii) $12.4 - (3.02 \times 1.2)$
   (iii) $(0.2 \times 0.3) + \frac{2.5}{10}$ (iv) $(7.2 - 1.43)\ 2.5 \times 1$
   (v) $(\frac{5}{2.5} + 0.07) \times 100$

7. (i) $(2.5 + 1\frac{7}{10}) + 0.256$ (ii) $(0.3 + 2.5) - (0.5 - 0.325)$
   (iii) $(4.25 \times 1) \times \frac{2.21}{1}$ (iv) $(\frac{5}{100} + 2.5) \div (\frac{2.5}{5} \times 2)$
   (v) $(\frac{12.7 - 4.23}{10}) \times \frac{7}{3.5}$

8. ගවුමක් මැසීමට විමලාට රෙදි මීටර 2.0ක් අවශ්‍ය ය. සුනිලාට ගවුමක් මැසීම සඳහා රෙදි මීටර 1.75ක් අවශ්‍ය ය. ඔවුන් දෙදෙනාට ම අවශ්‍ය රෙදි ප්‍රමාණය මීටර කොපමණ ද?

9. භාජනයක කිරි ලීටර 0.5ක් ඇත. තවත් භාජනයක කිරි ලීටර 1.25ක් ඇත. භාජන දෙකේ ම තිබෙන කිරි ප්‍රමාණය කොපමණ ද?

10. රිබන් මීටර 4.5කින් මීටර 2.25ක් කපා ගත් විට ඉතිරි ප්‍රමාණය මීටර කොපමණ ද?

11. එක්තරා කාර්යයක් සඳහා ලණු මීටර 20.5ක් අවශ්‍ය ය. ලණු මීටර 12.75ක් නිවසේ තිබුණි. තව කොපමණ ලණු මීටර ගණනක් මිලට ගත යුතු ද?

12. ඇඳුමක් මැසීමට රෙදි මීටර 2.25ක ප්‍රමාණයක් අවශ්‍ය වේ. එවැනි ඇඳුම් 8ක් මැසීමට අවශ්‍ය රෙදි ප්‍රමාණය මීටරවලින් කොපමණ ද?

13. පුබුදුගේ නිවසේ පරිභෝජනය සඳහා දිනකට අවශ්‍ය සහල් ප්‍රමාණය 1.5 kgකි. ඔහුගේ නිවසට දින 7කට අවශ්‍ය සහල් ප්‍රමාණය කොපමණ ද?

14. දිග 25 m හා පළල 11.7 m වූ සෘජුකෝණාස්‍රාකාර එළවළු පාත්තියක වර්ගඵලය වර්ගමීටර කොපමණ ද?

15. දිග 25.5 m හා පළල 18.1 m වූ සෘජුකෝණාස්‍රාකාර බිම් කොටසක වර්ගඵලය වර්ගමීටර කොපමණ ද?

16. ලණුවක දිග 5.5mකි. එය සමාන කැබලි 5කට කැපුවේ නම් එක් කැබැල්ලක දිග මීටර කොපමණ ද?

17. ගොවි බිමක ධාන්‍ය අස්වැන්න 284.8 kg කි. එය අට දෙනෙකු අතරේ සමසේ බෙදා ගන්නා ලදි. එක් අයෙකුට ලැබෙන ධාන්‍ය ප්‍රමාණය kg කොපමණ ද?

18. සෘජුකෝණාස්‍රාකාර බිම් කොටසක වර්ගඵලය 1219.68 m^2 වේ. එහි දිග 48.4m කි. එහි පළල මීටර කොපමණ ද?

3 දර්ශක හා ලඝුගණක

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- දර්ශක ආශ්‍රිත ගැටලු විසඳීමට,
- දර්ශක ආශ්‍රිත සමීකරණ විසඳීමට,
- ලඝුගණක වගු ඇතුළත් නොවන ලඝුගණක ගැටලු විසඳීමට,
- ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීමට

හැකියාව ලැබේ.

3.1 හැඳින්වීම

දර්ශක හා ලඝුගණක පිළිබඳ ව පෙර ශ්‍රේණිවල උගත් කරුණු මතකයට නඟා ගැනීමට පහත පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසවල යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. සුළු කරන්න.

(i) $a^5 \times a^3$ (ii) $p^2 \times q^3 \times p^5 \times q$ (iii) $\dfrac{y^5 \times x^3}{x^{10} \times y^3}$

(iv) $(y^3)^4 \times (y^3)^4$ (v) $\dfrac{(m^4)^3 \times (n^3)^4}{m^4 \times (n^2)^2}$ (vi) $2x^{-1} \times \dfrac{1}{x^{-2}}$

(vii) $\dfrac{5a^{-3}(m^3 m^2)^5}{(mn^{-1})^2}$ (viii) $\dfrac{(m^2n)^4 \times (m^3n^2)^5}{(mn^{-1})^2}$ (ix) $\dfrac{2y^{-2} \times y^2}{(8xy)^2}$

(x) $\dfrac{5x^2}{6x^{-1}} \times \dfrac{3y^{-2}x}{\frac{1}{5}x^{-1}}$

2. සුළු කරන්න.

(i) $lg\, 4 + lg\, 25$ (ii) $lg\, 40 + lg\, 25$ (iii) $lg\, 8 - lg\, 4 + lg\, 5$

(iv) $lg\, 625 - lg\, 5 + lg\, 4$ (v) $log_2 8 + log_4 16 - 2$

3.2 භාග සංඛ්‍යා ලෙස දර්ශක ඇති අවස්ථා

නිදසුන 1

(i) $\sqrt{4}$ හි අගය දර්ශකයක් ලෙස ලියා අගය සොයන්න.

$\sqrt{4}$

$= 4^{\frac{1}{2}}$

$= 2^{\cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}}$

$= 2$

සටහන

මෙය, $\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}}$ ලෙස ලියනු ලැබේ.

එසේම, $\sqrt[3]{64} = 64^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}}$ ලෙස ලියනු ලැබේ.

$\therefore \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

(ii) $\sqrt{25}$ හි අගය සොයන්න.

$\sqrt{25}$

$= 25^{\frac{1}{2}}$

$= 5^{\cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}}$

$= 5$

(iii) $\sqrt[3]{64}$ හි අගය සොයන්න.

$\sqrt[3]{64}$

$= 64^{\frac{1}{3}}$

$= 4^{\cancel{3} \times \frac{1}{\cancel{3}}}$

$= 4$

(iv) $(\sqrt{25})^{-1}$ හි අගය සොයන්න.

$(\sqrt{25})^{-1}$

$= \frac{1}{\sqrt{25}}$

$= \frac{1}{5^{2 \times \frac{1}{2}}}$

$= \frac{1}{5}$

සටහන

$5^{-1} = \frac{1}{5}$

$2^{-1} = \frac{1}{2}$

(v) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$ හි අගය සොයන්න.

$$\sqrt{1\frac{7}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{9}}$$

$$= \frac{16^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{4^{\cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}}}{3^{\cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}}}$$

$$= \frac{4}{3} \quad = 1\frac{1}{3}$$

(vi) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}$ හි අගය සොයන්න.

$$\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{9^{\cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}}}{4^{\cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}}}$$

$$= \frac{9}{4} \quad = 2\frac{1}{4}$$

(vii) $\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}}$ හි අගය සොයන්න.

$$\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}}$$

$$= \frac{4^{\cancel{3} \times \frac{1}{\cancel{3}}}}{2^{\cancel{3} \times \frac{1}{\cancel{3}}}}$$

$$= \frac{4^1}{2^1}$$

$$= 2$$

3.1 අභ්‍යාසය

1. පහත සඳහන් ඒවායේ අගය සොයන්න.

(i) $\sqrt{36}$ (ii) $\sqrt{49}$ (iii) $\sqrt{81}$ (iv) $\sqrt{144}$ (v) $\sqrt[3]{27}$

(vi) $\sqrt[3]{32}$ (vii) $\sqrt{100}$ (viii) $\sqrt[3]{343}$ (ix) $\sqrt[3]{729}$ (x) $\sqrt[2]{225}$

2. අගය සොයන්න.

(i) $\left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{1}{2}}$ (ii) $\left(\frac{25}{36}\right)^{-1\frac{1}{2}}$ (iii) $(0.25)^{\frac{1}{2}}$ (iv) $(0.25)^{-\frac{1}{2}}$

(v) $(0.027)^{\frac{-2}{3}}$ (vi) $\left(\frac{144}{225}\right)^{1\frac{1}{2}}$ (vii) $\left(\frac{216}{729}\right)^{-1\frac{2}{3}}$ (viii) $\left(1\frac{7}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(ix) $\left(\frac{1}{729}\right)^{-1\frac{1}{3}}$ (x) $(0.64)^{\frac{1}{2}}$

3. පහත ඒවායේ අගය සොයන්න.

(i) $\left(\frac{4}{25}\right)^{1\frac{1}{2}} \times 3^0 \times \left(\frac{25}{36}\right)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $(0.25)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$

(iii) $\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{2}{3}} \times 7^0$ (iv) $\left(\frac{125}{729}\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(1\frac{7}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2^{-1}}$

(v) $(0.04)^{\frac{1}{2}} \times (0.125)^{-\frac{2}{3}} \times \left(\frac{3}{27}\right)^{-\frac{1}{2}}$

3.3 දර්ශක ආශ්‍රිත සමීකරණ

නිදසුන 1

විසඳන්න.

(i) $2^x = 2^3$ (පාද සමාන නිසා)

$x = 3$

(ii) $2^x = 2^{\frac{1}{3}}$ (පාද සමාන නිසා)

$x = \frac{1}{3}$

(iii) $2^y = 32$

$2^y = 2^5$ (පාද සමාන නිසා)

$y = 5$

සටහන

දර්ශක ඇතුළත් ව ලියනු ලබන සමීකරණ දර්ශක ආශ්‍රිත සමීකරණ ලෙස හඳුනා ගත හැකි ය. එනම්,

$2^x = 1024$ (x – දර්ශකය)

මෙය දර්ශක ආශ්‍රිත සමීකරණයකි.

සටහන

එකිනෙකට සමාන බල දෙකක පාද සමාන නම් දර්ශක ද සමාන වේ.

$2^x = 2^{10}$, එනම් $x = 10$

(සමාන පාද)

එනම්, $a \neq 0$ විට $a^x = a^y$ නම් $x = y$ වේ.

3.2 අභ්‍යාසය

1. විසඳන්න.

(i) $2^x = 2^9$ (ii) $6^y = 6^3$ (iii) $10^x = 100$ (iv) $2^m = 8$ (v) $4 = 2^y$

(vi) $10^x = 1000$ (vii) $4^x = 64$ (viii) $5^y = 125$ (ix) $12^x = 144$ (x) $7^x = 49$

නිදසුන 1

විසඳන්න.

(i)
$$x^3 = 1000$$
$$x^3 = 10^3$$
$$x = 10$$

(iii)
$$m^3 = 125$$
$$m^3 = 5^3$$
$$m = 5$$

(iii)
$$a^{-2} = \frac{1}{81}$$
$$a^{-2} = \frac{1}{9^2}$$
$$a^{-2} = 9^{-2}$$
$$a = 9$$

සටහන

එකිනෙකට සමාන බල දෙකක දර්ශක සමාන වේ නම් පාද දෙක සමාන වේ. එනම්,

$x^3 = 8$ නම්,

$x^3 = 2^3$

$x = 2$

මෙහි දර්ශක සමාන වේ. එනම්, පාද සමාන වේ.

එනම්, $a^x = b^x$ නම් $a = b$ වේ. මෙහි $a \neq 0$ හා $b \neq 0$ වේ.

3.3 අභ්‍යාසය

1. පහත සඳහන් ඒවා විසඳන්න.

(i) $x^2 = 216$ (ii) $m^2 = 81$ (iii) $p^3 = 27$ (iv) $y^2 = 64$ (v) $x^3 = 64$

(vi) $y^2 = 625$ (vii) $a^3 = 125$ (viii) $x^{-1} = \frac{1}{2}$ (ix) $p^{-3} = \frac{1}{125}$ (x) $k^{-2} = \frac{1}{225}$

3.4 දර්ශක ආශ්‍රිත සමීකරණ තවදුරටත්

නිදසුන 1

විසඳන්න.

(i)
$$2^x \times 4^x = 8$$
$$2^x \times (2^2)^x = 8$$
$$2^x \times 2^{2x} = 2^3 \quad (2^x \times 2^{2x} = 2^{x+2x})$$
$$2^{x+2x} = 2^3 \quad \text{(පාද සමාන නිසා)}$$
$$2^{3x} = 2^3$$
$$\therefore 3x = 3$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$$
$$x = 1$$

සටහන

සියලු ම පාද 2 බවට හරවන්න.

$4 = 2^2, \ 8 = 2^3$

(ii) $3^{x-1} \times 9 = 27$
$3^{x-1} \times 3^2 = 3^3$
$3^{x-1+2} = 3^3$
$3^{x+1} = 3^3$
$\therefore x + 1 = 3$
$x = 3 - 1$
$x = 2$

(iii) $\frac{1}{27} \times 9^x = 81$
$\frac{1}{3^3} \times 3^{2x} = 3^4$
$3^{-3} \times 3^{2x} = 3^4$
$3^{-3+2x} = 3^4$
$-3 + 2x = 4$
$2x = 4 + 3$
$\frac{2x}{2} = \frac{7}{2}$
$x = 3\frac{1}{2}$

3.4 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන සමීකරණ විසඳන්න.

(i) $2^x \times 4 = 8$ (ii) $3^{2x} \times 27^{x-1} = 9$ (iii) $3^y = \frac{1}{27}$

(iv) $2^{3x} \times \frac{1}{8} = 2^{2x}$ (v) $2^{2x-1} = 8$ (vi) $9 = 3^{3x-1}$

(vii) $y^3 = 125$ (viii) $8 \times 2^{x-5} = 8^{x-2}$ (ix) $y^2 = \frac{1}{5^{-2}}$

(x) $5 \times 125^{3x-1} = 25$

3.5 ලඝුගණක නීති

ඔබ මීට පෙර ඉගෙන ඇති ලඝුගණක නීති පිළිබඳ ව සිහිපත් කර ගන්න. ඒ අනුව,

$\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$ බවද

$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$ බවද ඔබ ඉගෙන ඇත.

පහත නිදසුන් සලකා බලමු.

නිදසුන 1

$lg\ 10^2$ හි අගය සොයන්න.

I ක්‍රමය

$lg\ 10^2$
$= lg\ (10 \times 10)$
$= lg\ 10 + lg\ 10$
$= 1 + 1$
$= 2$

II ක්‍රමය

$lg\ 10^2 = 2\ lg\ 10$
$= 2 \times 1$ ($lg\ 10 = 1$)
$= 2$

II ක්‍රමයට අදාළව
$lg\ m^r = r\ lg\ m$

ඉහත නිදසුන්වලින් පැහැදිලි වන්නේ $\log_a x^n = n\log_a x$ ලෙස ලිවිය හැකි බවයි. මෙය ද ලඝුගණක නීතියක් ලෙස භාවිත කෙරේ.

$$log_5 5^2 = 2\ log_5 5$$

$$lg\ 7^2 = 2\ lg\ 7$$

$$lg\ 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ lg\ 5$$

$$log_a 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ log_a 10$$

නිදසුන 2

$lg\ 25 + lg\ 4$ හි අගය සොයන්න.

$lg\ 25 + lg\ 4$

$= lg\ (25 \times 4)$

$= lg\ 100$

$= 2$

නිදසුන 3

$\frac{1}{2}\ lg\ 64 - lg\ 2 + 2\ lg\ 5$ හි අගය සොයන්න.

$\frac{1}{2}\ lg\ 64 - lg\ 2 + 2\ lg\ 5$

$= lg\ 64^{\frac{1}{2}} - lg\ 2 + lg\ 5^2$

$= lg\ \dfrac{64^{\frac{1}{2}} \times 5^2}{2}$

$= lg\ \dfrac{8^{2 \times \frac{1}{2}} \times 25}{2}$

$= lg\ \dfrac{8 \times 25}{2}$ (8 → 4, 2 → 1)

$= lg\ 100$

$= 2$

3.5 අභ්‍යාසය

1. සුළු කර අගය සොයන්න.

(i) $\frac{1}{2}\ lg\ 25 + 2\ lg\ 2 - lg\ 4 + lg\ 20$

(ii) $lg\ 8 - lg\ 2 + 2\ lg\ 5$

(iii) $-lg\ 4 + 2\ lg\ 5 + lg\ 16$

(iv) $lg\ \frac{5}{7} - lg\ \frac{15}{56} + lg\ \frac{60}{16}$

(v) $lg\ \frac{11}{9} - lg\ \frac{1}{15} + lg\ \frac{6}{11}$

3.6 ලඝුගණක ආශ්‍රිත සමීකරණ

කිසියම් සංඛ්‍යා දෙකක එකම පාදයෙන් ලියා ඇති ලඝුගණක දෙක සමාන වන විට එම සංඛ්‍යා දෙක ද සමාන වේ.

එනම්, $log_a x = log_a y$ නම් $x = y$ වේ. පහත දක්වා ඇති නිදසුන් සලකා බලමු.

නිදසුන 1

$log_a x + log_a 2 = log_a 10$ හි අගය සොයන්න.

$log_a x + log_a 2 = log_a 10$

$log_a (x \times 2) \quad = log_a 10$

$2x = 10$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

ඉන්පසුව සාමාන්‍ය සමීකරණයක් ලෙස විසඳමු.

$\frac{\not{2}x}{\not{2}} = \frac{10}{2}$

$x = 5$

නිදසුන 2

$\frac{1}{2}\, lg\, 36 + lg\, x = lg\, 24$ හි අගය සොයන්න.

$\frac{1}{2}\, lg\, 36 + lg\, x = lg\, 24$

$lg\, (36^{\frac{1}{2}} \times x) \quad = lg\, 24$

$6^{\not{2} \times \frac{1}{\not{2}}} \times x \quad = 24$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

ඉන්පසුව සාමාන්‍ය සමීකරණයක් ලෙස විසඳමු.

$6x = 24$

$\frac{\not{6}x}{\not{6}} = \frac{24}{6}$

$x \quad = 4$

3.6 අභ්‍යාසය

1. සුළු කර අගය සොයන්න.

(i) $lg\, x + lg\, 2 = lg\, 16$

(ii) $\frac{1}{2}\, lg\, x + lg\, 4 = lg\, 60$

(iii) $\frac{1}{2}\, lg\, 64 + lg\, y = lg\, 2 + lg\, 7$

(iv) $2\, lg\, x + 3\, lg\, 2 = lg\, 20 + lg\, 40$

3.7 0ත් 1ත් අතර සංඛ්‍යාවක ලඝුගණකය සෙවීම

පහත නිදසුන් සලකා බලමු.

නිදසුන 1

0.5721හි ලඝුගණකය සොයන්න.

5.721හි ලඝුගණකය 0.7575 බව වගුව මගින් සොයා ගත හැකි වේ. ඒ අනුව, 0.5721හි ලඝුගණකය සොයමු.

$0.5721 = 5.721 \div 10 = 5.721 \times \frac{1}{10} = 5.721 \times 10^{-1}$

$lg\, (0.5721) \quad = lg\, (5.721 \times 10^{-1})$

$= lg\, 5.721 + lg\, 10^{-1}$

$= 0.7575 + (-1)$

$= \bar{1}.7575$

සටහන

මෙහිදී පූර්ණාංශය පමණක් සෘණ වන බැවින් −1, −2, −3 වැනි පූර්ණාංශ $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ ආකාරයට ලියනු ලැබේ. මේවා වියුති එක, වියුති දෙක, වියුති තුන ලෙස කියවනු ලැබේ.

නිදසුන 2

0.05721හි ලඝුගණකය සොයන්න.

$lg\ (0.05721) = lg\ (5.721 \times 10^{-2}) = \bar{2}.7575$

නිදසුන 3

0.005721හි ලඝුගණකය සොයන්න.

$lg\ (0.005721) = lg\ (5.721 \times 10^{-3}) = \bar{3}.7575$

විශේෂ සටහන

0.5721හි පූර්ණාංශය සෙවීමට ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාව හමුවන තෙක් ඇති බිංදු ගණන සොයන්න. මෙහි 0 එකකි. එනම්, පූර්ණාංශය වියුති 1කි. ($\bar{1}$)
0.0572හි පූර්ණාංශය සෙවීමට ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාව හමුවන තෙක් ඇති බිංදු ගණන සොයන්න. 0.0572හි බිංදු ගණන 2කි. එම නිසා පූර්ණාංශය වියුති 2කි. ($\bar{2}$)

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය 01

1. 24.5 යන සංඛ්‍යාව සලකන්න.
   (i) එය විද්‍යාත්මක අංකනයෙන් ලියන්න.
   (ii) එහි පූර්ණාංශය සොයන්න.
   (iii) එහි ලඝුගණකය සොයන්න.
2. 2.514 යන සංඛ්‍යාව සළකන්න.
   (i) එය විද්‍යාත්මක අංකනයෙන් ලියන්න.
   (ii) එහි පූර්ණාංශය සොයන්න.
   (iii) එහි ලඝුගණකය සොයන්න.
3. 6937.3 යන සංඛ්‍යාව සළකන්න.
   (i) එය විද්‍යාත්මක අංකනයෙන් ලියන්න.
   (ii) එහි පූර්ණාංශය සොයන්න.
   (iii) එහි ලඝුගණකය සොයන්න.

ඔබ 4 ශ්‍රේණියේදී උගත් ලඝුගණක පිළිබඳ දැනුම මතකයට නගා ගැනීමට පහත සඳහන් ගැටලු ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් ලබා ගන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය 02

1. මේවා සුළු කරන්න.

(i) $\dfrac{57.32 \times 32.18}{3.29}$ (ii) $\dfrac{6.293 \times 5.17}{23.65}$

(iii) $\dfrac{26.18 \times 1.849}{1.95}$ (iv) $\dfrac{56.17 \times 29.3}{14.15}$

(v) $\dfrac{6.5 \times 29.34}{1.005}$

3.8 1ට අඩු සංඛ්‍යාවල ලඝුගණක එකතු කිරීම

පහත නිදසුන් සලකා බලමු.

නිදසුන 1

$$\begin{array}{r} \bar{2}.5145 \\ +\bar{3}.4121 \\ \hline \bar{5}.9266 \\ \hline\hline \end{array}$$

සටහන

$\bar{2} + \bar{3} = \bar{5}$

නිදසුන 2

$$\begin{array}{r} \overline{10}.5143 \\ +\ \bar{2}.7124 \\ \hline \overline{11}.2267 \\ \hline\hline \end{array}$$

සටහන

$\overline{10} + \bar{2} = \overline{12}$

$1 + \overline{12}$

$1 + (-12)$

$1 - 12$

$-11 = \overline{11}$

නිදසුන 3

$$\begin{array}{r} \bar{3}.4157 \\ +\ 0.9243 \\ \hline \bar{2}.3400 \\ \hline\hline \end{array}$$

සටහන

$\bar{3} + 0 = \bar{3}$

$\bar{3} + 1 = -3 + 1$

$= -2$

$= \bar{2}$

3.7 අභ්‍යාසය

1. පහත සඳහන් ඒවා එකතු කරන්න.

(i) $\bar{2}.5141 + \bar{3}.1467$ (ii) $\bar{2}.5142 + \bar{3}.3419$

(iii) $\bar{2}.0072 + \bar{9}.9007$ (iv) $\bar{2}.5776 + \bar{2}.7227$

(v) $\bar{2}.3375 + \bar{6}.9227$ (vi) $\bar{2}.5557 + \bar{2}.0076$

(vii) $\bar{1}.4457 + 0.5572$ (viii) $\bar{2}.5147 + 2.0009$

(ix) $\bar{1}.5792 + 2.6172$ (x) $\bar{2}.1472 + \bar{3}.9005$

3.9 1ට අඩු සංඛ්‍යාවල ලඝුගණක අඩු කිරීම

නිදසුන 1

$$\begin{array}{r} \bar{5}.4137 \\ -\bar{2}.3112 \\ \hline \bar{3}.1025 \\ \hline\hline \end{array}$$

සටහන

මෙහි, $\bar{5} - (\bar{2})$

$-5 - (-2)$

$-5 + 2$

$-3 = \bar{3}$

නිදසුන 2

$\bar{1} + ①$ → ①

$$\begin{array}{r} \bar{3}.3218 \\ -\ 0.4111 \\ \hline \bar{4}.9107 \\ \hline\hline \end{array}$$

සටහන

3ත් 4ක් අඩුකළ නොහැකි බැවින්, $\bar{3}$, න් +1ක් ගත යුතුයි. නමුත් $\bar{3}$ න් +1ක් ලබාගත නොහැකි ය. නමුත් $\bar{1} + 1 = 0$ නිසා, $\bar{1}$, $\bar{3}$ ළඟට එකතු කර මෙසේ යොදන +1 , 3 ළඟටවිත් 13 වේ. දැන් 13න් 4ක් අඩු කරන්න. අනතුරුව ඉතිරි $\bar{1}, \bar{3}$ට එකතු වේ. එනම්, $\bar{1} + \bar{3} = \bar{4}$

3.8 අභ්‍යාසය

1. අඩු කරන්න.

(i) $\bar{2}.5147 - \bar{1}.4147$ (ii) $\bar{2}.4321 - \bar{1}.3457$

(iii) $\bar{2}.9147 - 2.3452$ (iv) $\bar{2}.3457 - \bar{1}.2457$

(v) $\bar{2}.3218 - \bar{3}.2118$ (vi) $\bar{2}.2451 - 0.9257$

(vii) $\bar{1}.1972 - \bar{1}.2457$ (viii) $\bar{2}.2437 - 4.3219$

(ix) $\bar{2}.0007 - \bar{2}.1234$ (x) $0.0000 - \bar{1}.2341$

3.10 1ට අඩු සංඛ්‍යාවල ලඝුගණක ගුණ කිරීම

පහත නිදසුන් සලකා බලමු.

නිදසුන 1

(i) $\bar{2}.4512 \times 2$ හි අගය සොයන්න.

$\bar{4}.9024$

සටහන

$\bar{2} \times 2$

$(-2) \times (+2)$

$-4 = \bar{4}$

(ii) $\bar{2}.5226 \times 3$

$\bar{5}.5678$

සටහන

$\bar{2} \times 3$	$3 \times 5 = 15$
$(-2) \times (+3)$	මෙයින් 5 දැමීමෙන් ඉතිරි 1
-6	
-6	$+1$
$-6 + 1$	
-5	
$\bar{5}$	

3.9 අභ්‍යාසය

1. ගුණ කරන්න.

(i) $\bar{1}.4167 \times 2$ (ii) $\bar{1}.4444 \times 2$ (iii) $\bar{2}.6797 \times 2$ (iv) $\bar{2}.6675 \times 2$

(v) $\bar{2}.9275 \times 2$ (vi) $\bar{2}.5729 \times 2$ (vii) $\bar{1}.9972 \times 2$ (viii) $\bar{1}.6666 \times 2$

(ix) $\bar{1}.7768 \times 2$ (x) $\bar{2}.4972 \times 2$

3.11 1ට අඩු සංඛ්‍යාවල ලඝුගණක බෙදීම

දැන් අපි වියුති ඇතුළත් ලඝුගණක කීපයක් බෙදන අයුරු පහත නිදසුන් මගින් සලකා බලමු.

නිදසුන 1

(i) $\frac{1}{2} \times \bar{2}.4126$ සුළු කරන්න.

$\frac{1}{2} \times \bar{2}.4126 = \bar{1}.2063$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \bar{1}.2063 \\ \hline
2 & \bar{2}.4126 \\
 & \underline{\bar{2}} \\
 & 0\ 4 \\
 & \ \ \underline{4} \\
 & \ \ 0 \\
 & \ \ \ 1 \\
 & \ \ \ \underline{0} \\
 & \ \ \ 12 \\
 & \ \ \ \underline{12} \\
 & \ \ \ \ 06 \\
 & \ \ \ \ \underline{06} \\
 & \ \ \ \ \ 0
\end{array}
$$

(ii) $\frac{1}{2} \times \bar{1}.4268$ සුළු කරන්න.

$\frac{1}{2} \times \bar{1}.4268 = \bar{1}.7134$

සටහන

$\frac{1}{2} \times \bar{1}.4268$ හි $\bar{1}$ට 2 ඒවා නැත. නමුත් ඒ සඳහා 0 නොගනී. (පහත පරිදි)

0 ← මෙය වැරදි

$2\,\overline{)\ \bar{1}.4268}$

එහි නිවැරදි ආකාරය පහත දැක්වෙන පරිදි වේ.

$-1.4268 \div 2$

$-1.4268 = -1 + 0.4268$ වේ.

$(-1 + 0.4268) \div 2$ (−1, +1)

$= (\bar{2} + 1.4268) \div 2$

$= \bar{1} + 0.7134$

$= \bar{1} + 0.7134$ වේ.

3.10 අභ්‍යාසය

1. පහත සඳහන් ඒවා සුළු කරන්න.

(i) $\frac{1}{2} \times \bar{2}.4618$ (ii) $\frac{1}{2} \times \bar{2}.6126$

(iii) $\frac{1}{2} \times \bar{2}.2486$ (iv) $\frac{1}{2} \times \bar{2}.4488$

(v) $\frac{1}{2} \times \bar{1}.6412$ (vi) $\frac{1}{2} \times \bar{1}.4624$ (vii) $\frac{1}{2} \times \bar{1}.6246$

3.12 ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීම

ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීම සඳහා පහත නිදසුන සලකා බලමු.

නිදසුන 1

$\dfrac{52.41 \times (2.43)^2}{4.25}$ හි අගය සොයන්න.

$\dfrac{52.41 \times (2.43)^2}{4.25}$

$x = \dfrac{52.41 \times (2.43)^2}{4.25}$ ලෙස ගත් විට,

$lg\, x = lg\, 52.41 + 2\, lg\, 2.43 - lg\, 4.25$

$lg\, x = 1.7194 + (2 \times 0.3856) - 0.6284$

$= 1.7194 + 0.7712 - 0.6284$

$= 2.4906 - 0.6284$

$lg\, x = 1.8622$

$x = \text{antilog}\,(1.8622)$

$x = 72.81$ $\therefore \dfrac{52.41 \times (2.43)^2}{4.25} = 72.81$

නිදසුන 2

$\dfrac{\sqrt{0.4162} \times (42.51)^2}{3.42}$ හි අගය සොයන්න.

සටහන

$\sqrt{0.4162} = (0.4162)^{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{\sqrt{0.4162} \times (42.51)^2}{3.42}$

$x = \dfrac{\sqrt{0.4162} \times (42.51)^2}{3.42}$ නම්,

$lg\, x = \dfrac{1}{2}\, lg\, 0.4162 + 2\, lg\, 42.51 - lg\, 3.42$

$lg\, x = \dfrac{1}{2} \times \bar{1}.6193 + (2 \times 1.6285) - 0.5340$

$= \bar{1}.8096 + 3.2570 - 0.5340$

$lg\, x = 3.0666 - 0.5340$

$lg\, x = 2.5326$

$x = \text{antilog}\,(2.5326)$

$x = 340.9$ $\therefore \dfrac{\sqrt{0.4162} \times (42.51)^2}{3.42} = 340.9$

3.11 අභ්‍යාසය

1. ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් පහත සඳහන් ඒවායේ අගය සොයන්න.

(i) $\dfrac{\sqrt{0.3451} \times (24.51)^2}{32.5}$

(ii) $\dfrac{(0.4151)^2 \times \sqrt{0.02457}}{(24.5)^2}$

(iii) $\dfrac{24.51 \times \sqrt{0.0042}}{124.3}$

(iv) $\dfrac{(24.5)^2 \times \sqrt{0.2769}}{325.2}$

(v) $\dfrac{\sqrt{29.41} \times \sqrt{0.5292}}{(2.41)^2 \times 5.24}$

(vi) $\dfrac{(32.5)^2}{4.1} - \dfrac{\sqrt{0.5245}}{(24.9)^2}$

(vii) $\dfrac{(2.451)^2 \times \sqrt{0.07257}}{29.61 \times (24.31)^{\frac{1}{2}}}$

(viii) $\dfrac{\sqrt{0.0421} \times (62.5)^2}{\sqrt{0.0429}}$

(ix) $\dfrac{(62.51)^2 \times \sqrt{0.0457}}{(1.454)^3}$

(x) $\dfrac{\sqrt{24.52} \times (29.3)^2}{\sqrt{0.0295}}$

සාරාංශය

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ලෙස දර්ශක ආකාරයෙන් දැක්විය හැකි ය.
- $a^x = a^y$ නම් $x = y$ වේ. (මෙහි $a \neq 0$)
- $a^x = b^x$ නම් $a = b$ වේ. (මෙහි $a \neq 0$ හා $a \neq 0$ වේ.)
- $\log_a x^n = n\log_a x$ වේ.

4 පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

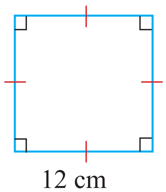
මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- සෘජු කේතුවක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය ගණනය කිරීමට,
- ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය ගණනය කිරීමට,

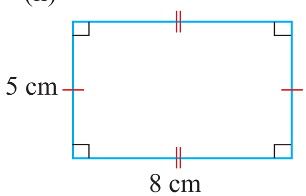
හැකියාව ලැබේ.

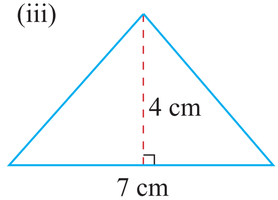
ඔබ විසින් පෙර ශ්‍රේණිවල දී උගත් වර්ගඵලය පිළිබඳ සංකල්පය නැවත ආවර්ජනය කිරීම සඳහා පහත දක්වා ඇති පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසයෙහි යෙදෙන්න.

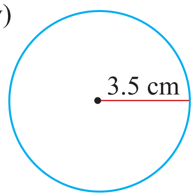
පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

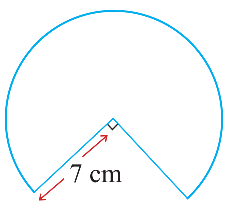
1. පහත දක්වා ඇති තල රූපයන්හි වර්ගඵලය ගණනය කරන්න.

(i)


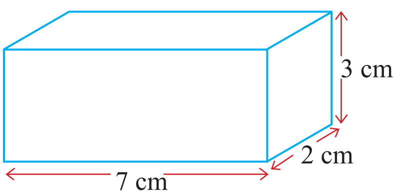
(ii)


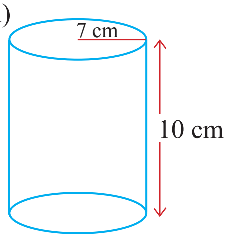
(iii)


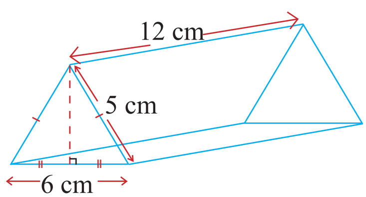
(iv)


(v)


2. පහත දක්වා ඇති ඝන වස්තුවල පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය ගණනය කරන්න.

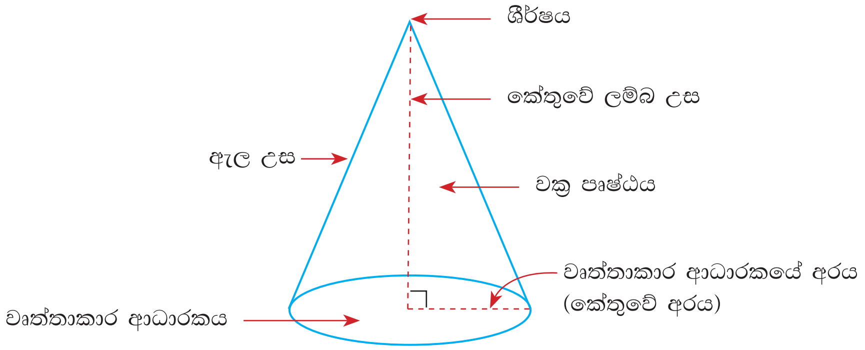
(i)


(ii)


(iii)


4.1 කේතුව

ඉහත දක්වා ඇති ආකාරයේ වස්තු කේතු ලෙස හැඳින්වේ. කේතුවකට වෘත්තාකාර තල පෘෂ්ඨ කොටසක් හා වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසක් ඇත. එම වෘත්තාකාර තල පෘෂ්ඨ කොටසට කේතුවේ ආධාරකය යැයි කියනු ලැබේ.



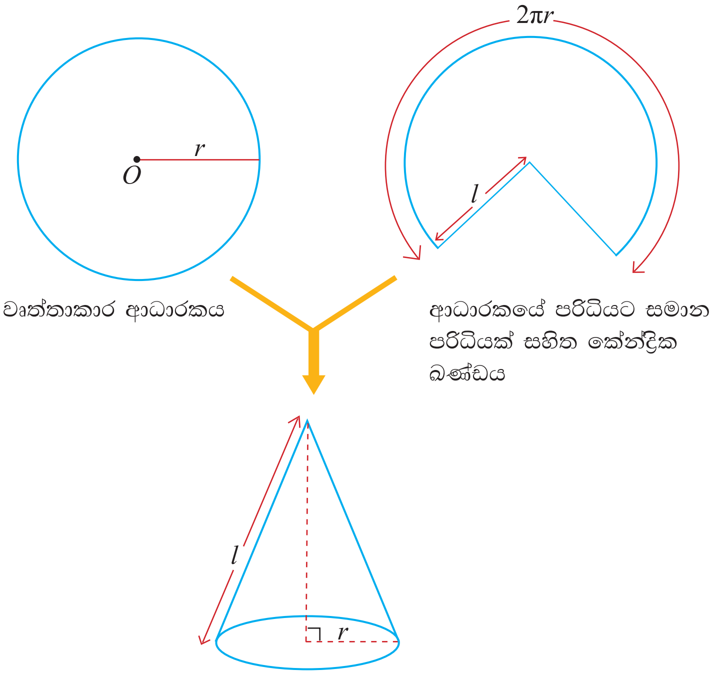
කේතුවක ආධාරක වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයේ සිට ශීර්ෂයට යා කෙරෙන රේඛා ඛණ්ඩය ආධාරකයට ලම්බක වේ නම් එය සෘජු වෘත්ත කේතුවක් ලෙස හැඳින්වේ. කේතුවක ආධාරක වෘත්තයේ අරයට කේතුවේ අරය යැයි ද ආධාරක වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හා ශීර්ෂය අතර දුරට කේතුවේ ලම්බ උස යැයි ද කියනු ලැබේ. එමෙන් ම කේතුවේ ශීර්ෂය සහ ආධාරක වෘත්තයේ පරිධිය මත ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයක් යා කෙරෙන රේඛා ඛණ්ඩයේ දිගට කේතුවේ ඇල උස යැයි ද කියනු ලැබේ.

සාමාන්‍යයෙන් කේතුවක අරය r මගින් ද උස h මගින් ද ඇල උස l මගින් ද නිරූපණය කරයි.

සෘජු වෘත්ත කේතුවක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

කේතුවක අරය සහ ඇල උස දී ඇති විට එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සෙවීම සඳහා එහි පෘෂ්ඨ කොටස්හි වර්ගඵලයන් සොයා ඓක්‍යය ගත යුතු ය. පතුලේ ආධාරක වෘත්තාකාර තල පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය වෘත්තයක වර්ගඵලය සෙවීමේ සූත්‍රය ආධාරයෙන් ගණනය කළ හැකි ය. වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය සෙවීම පහත පරිදි විමසා බලමු.

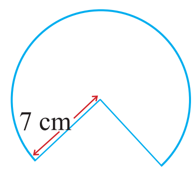
ඔබ මින් පෙර ශ්‍රේණිවලදී කේතුවක් සාදා ගත් ආකාරය මතකයට නඟා ගන්න. එහිදී වෘත්තාකාර කාඩ්බෝඩ් කැබැල්ලක් ගෙන එම වෘත්තයේ පරිධිය වටා කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක් අලවා ගැනීමෙන් කේතුවක් සාදා ගන්නා ලදි. එවිට, කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩ කොටස කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය ලෙස පිහිටයි. තව ද කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ පරිධිය වෘත්තාකාර ආධාරකය මත පිහිටන අතර කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ අරය කේතුවේ ඇල උස ලෙස පිහිටයි.



කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ වර්ගඵලය ලබා ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමෙහි යෙදෙන්න.

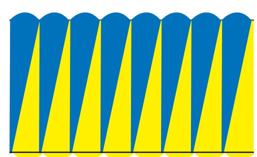
ක්‍රියාකාරකම 1

පියවර 1 - පහත රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට අරය 7 cm වූ කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක් කඩදාසියක් මත පිටපත් කර ගන්න. (කේන්ද්‍රික කෝණයේ අගය කුමක් වුව ද ක්‍රියාකාරකම සිදු කළ හැකි ය.)

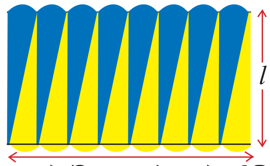


පියවර 2 - පහත රූපයේ පරිදි කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩය කුඩා කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩවලට බෙදා වර්ණ දෙකකින් එම තීරු වර්ණ ගන්වන්න.

පියවර 3 - දැන් ඉහත තීරු සුදුසු උපකරණයක් මගින් වෙන් කර පහත රූපයේ දක්වා ඇති ආකාරයට වෙනත් කඩදාසියක අලවන්න.

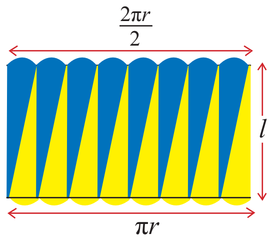


කුඩා කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩ සියල්ල අලවා අවසන් කළ පසු ඔබට ලැබෙන තල රූපය දෙස බලන්න. එය බොහෝ දුරට සෘජුකෝණාස්‍රාකාර හැඩයකට සමාන වී ඇත. (එම කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩ කුඩා වූ විට) තව ද වෙන් කළ තීරු ප්‍රමාණයෙන් හරියට බාගය බැගින් සෘජුකෝණාස්‍රයේ එක් අතකට සමාන්තර පාද මත ඇලවී ඇත. කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ අරය සෘජුකෝණාස්‍රාකාර කොටසේ පළල ලෙස ලැබී ඇත. මේ අනුව අරය l වන කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක් ගෙන ඉහත ක්‍රියාකාරකම සිදු කළේ නම් ලැබෙන සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය පහත පරිදි වේ.



$\frac{1}{2}$ × කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ පරිධිය

කේතුවක වක්‍ර පෘෂ්ඨ ආධාරක වෘත්තය මත පිහිටන නිසා අරය r වූ කේතුවක වක්‍ර පෘෂ්ඨය සාදන කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ පරිධිය $2\pi r$ වේ. එබැවින්,

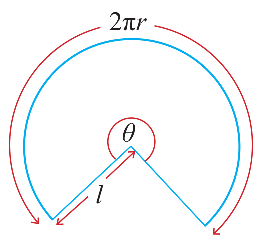


∴ ආශ්‍රිත සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය $= \pi r \times l$

∴ කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= \pi rl$

වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටස වන කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ වර්ගඵලය මෙලෙස ද ගණනය කළ හැකි ය.

කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ අරය l වේ. කේතුවේ අරය r නම් ආධාරක වෘත්තයේ පරිධිය මත කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ චාප දිග පිහිටන නිසා චාප දිග $2\pi r$ වේ. කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ කේන්ද්‍ර කෝණය θ නම්, කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක චාප දිග සොයන සූත්‍රය භාවිතයෙන්,



$$2\pi l \times \frac{\theta}{360^{o}} = 2\pi r$$

$$\theta = \frac{2\pi r}{2\pi l} \times 360^{o}$$

$$\theta = \frac{360^{o}\, r}{l}$$ වේ.

මෙම θ කේන්ද්‍ර කෝණය සහිත කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක වර්ගඵලය සූත්‍රය භාවිතයෙන් ලබා ගනිමු.

$$\frac{\theta}{360^{o}} \times \pi l^2$$

θ ට මුල් සමීකරණයේ අගය ආදේශ කළ විට, $\frac{360^{o} r}{l} \times \frac{\pi l^2}{360^{o}} = \pi rl$

මේ අනුව, කේතුවක වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය πrl වේ. එම නිසා,

කේතුවක මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $=$ (වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය) $+$ (වෘත්තාකාර ආධාරකයේ වර්ගඵලය)

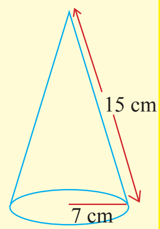
$= \pi rl + \pi r^2$

මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය A නම්, $A = \pi rl + \pi r^2$

කේතුවක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය පිළිබඳ නිදසුන් කිහිපයක් පිළිබඳ අවධානය යොමු කරමු.

නිදසුන 1

රූපයේ දක්වා ඇති ඝන කේතුවේ අරය 7 cm ද ඇල උස 15 cm ද වේ. කේතුවේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න. ($\pi = \frac{22}{7}$ ලෙස සලකන්න.)



කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= \pi r \times l$

$= \frac{22}{7} \times 7 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$

$= 330 \text{ cm}^2$

වෘත්තාකාර තල පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 154 \text{ cm}^2$

$\therefore$ කේතුවේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 330 \text{ cm}^2 + 154 \text{ cm}^2$

$= 484 \text{ cm}^2$

නිදසුන 2

ආධාරකයේ පරිධිය 44 cm ක් වූ කේතුවක උස 24 cm ක් වේ.

(i) කේතුවේ අරය සොයන්න.

(ii) කේතුවේ ඇල උස සොයන්න.

(iii) මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

(i) කේතුවේ අරය r නම්, ආධාරක වෘත්තයේ පරිධිය $= 2\pi r$

$44 = 2\pi r$

$44 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$

$\frac{44 \times 7}{44} = r$

$7 = r$

$\therefore$ කේතුවේ අරය 7 cm වේ.

(ii) පයිතගරස් සම්බන්ධය අනුව,

$l^2 = 24^2 + 7^2$

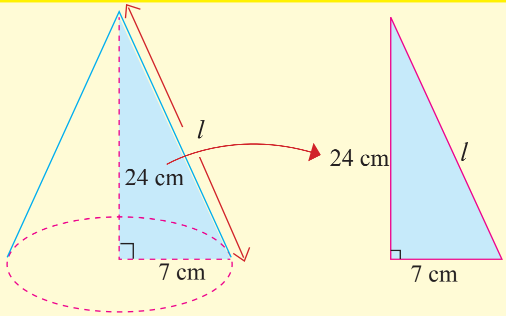
$l^2 = 576 + 49$

$l^2 = 625$

$l = \sqrt{625}$

$= 25$

$\therefore$ කේතුවේ ඇල උස 25 cm කි.



(iii) මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= \pi rl + \pi r^2$

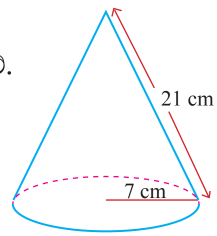
$= \left(\frac{22}{7} \times 7 \times 25\right) + \left(\frac{22}{7} \times 7 \times 7\right)$

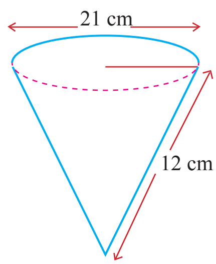
$= 550\ cm^2 + 154\ cm^2$

$= 704\ cm^2$

4.1 අභ්‍යාසය

1. තහඩුවකින් තනන ලද පතුල සහිත කේතුවක් රූපයේ දැක්වේ. එහි පතුලේ අරය 7 cmකි. ඇල උස 21 cm කි. එහි,
   (i) පතුලේ වර්ගඵලය සොයන්න.
   (ii) වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය සොයන්න.
   (iii) මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.





2. රූපයේ දැක්වෙන්නේ ඇලුමිනියම් ලෝහයෙන් තැනූ කේතු ආකාර පුනීලයකි. පුනීලයේ බාහිර පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

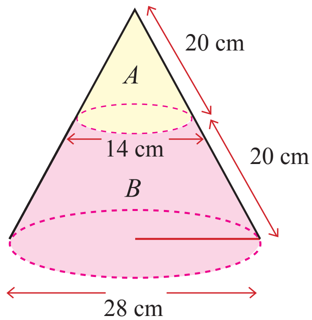
3. ආධාරකයේ පරිධිය 88 cmක් වූ කේතු ආකාරයේ වැලි ගොඩක ඇල උස 20 cmකි. එම වැලි ගොඩෙහි,
   (i) පතුලේ අරය ගණනය කරන්න.
   (ii) එම වැලි ගොඩ වැසීමට අවශ්‍ය කැන්වස් රෙද්දක අවම වර්ගඵලය සොයන්න.

4. ඇල උස 25 cm ද ඍජු උස 24 cm ද වූ ඝන කේතුවක,
   (i) පතුලේ අරය ගණනය කරන්න. (ii) මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

5. පතුලේ අරය 14 cmක් වූ කේතුවක මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $1496\ cm^2$ නම් කේතුවේ ඇල උස සොයන්න.

6. කේතුවක හැඩයෙන් යුත් ඝන වස්තුවක ඇල උස 14 cm වේ. එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය $396\ cm^2$ නම්, කේතුවේ අරය ගණනය කරන්න.

7. ඍජු වෘත්ත ඝන කේතුවක් රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට කපා වෙන් කර ඇත. ඉහළ කොටස A ලෙස ද පහළ කොටස B ලෙස ද නම් කර ඇත.



(i) සම්පූර්ණ කේතුවෙහි ඇති වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය සොයන්න.
(ii) A ලෙස නම් කර ඇති කේතු කොටසේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය සොයන්න.
(iii) B ලෙස නම් කර ඇති කොටසේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය සොයන්න.
(iv) ඍජු වෘත්ත ඝන කේතුවේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

4.2 ගෝලය

ටෙනිස් බෝලය

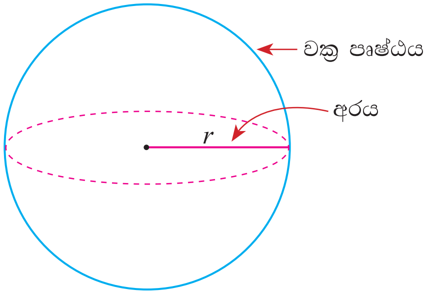
පාපන්දුව

යගුලිය

වීදුරු බෝල කිහිපයක්

ලෝක ගෝලය

ගෝලීය හැඩය පිළිබඳ ව මේ වන විටත් ඔබ විසින් පැහැදිලි අවබෝධයක් ලබා ඇත. අචල ලක්ෂ්‍යයක සිට නියත දුරකින් ත්‍රිමාන අවකාශයේ පිහිටි ලක්ෂ්‍ය කුලකය ගෝලයක් ලෙස හැඳින්වේ. එම අචල ලක්ෂ්‍යයට ගෝලයේ කේන්ද්‍රය යැයි ද නියත දුරට අරය යැයි ද කියනු ලැබේ. ගෝලයට දාර හෝ ශීර්ෂ නොමැති අතර එක් වක්‍ර පෘෂ්ඨයක් පමණක් ඇත.

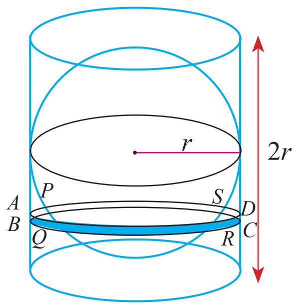


සාමාන්‍යයෙන් ගෝලයක අරය r මගින් නිරූපණය කරයි.

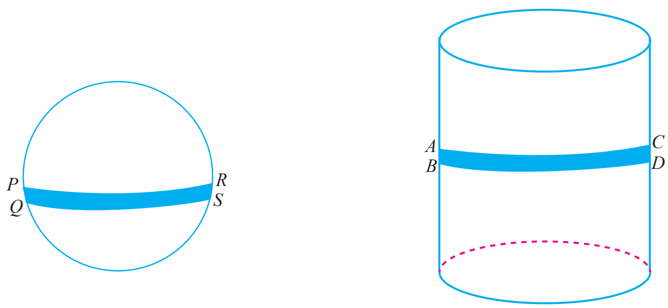
ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

ගෝලයට දාර, ශීර්ෂ නොමැති බැවින් අප විසින් ඉහත දී අධ්‍යයනය කළ ඝන වස්තූන් මෙන් ගෝලය විවිධ කොටස්වලට වෙන් කර වර්ගඵලය ගණනය කළ නොහැකි ය. එබැවින් ගෝලයක වර්ගඵලය ගණනය කිරීම සඳහා ක්‍රි.පූ 225 දී ග්‍රීසියේ විසූ ආකිමිඩීස් නම් ගණිතඥයා විසින් නිරීක්ෂණය කළ සංසිද්ධියක් යොදා ගනී.

"ගෝලයක අරයට සමාන අරයක් ද ගෝලයේ විෂ්කම්භයට සමාන උසක් සහිත සිලින්ඩරයකට එම ගෝලයේ පරිසිලින්ඩරය යැයි කියනු ලැබේ. එම ගෝලය සිලින්ඩරය තුළ ඇති විට සිලින්ඩරයේ වෘත්තාකාර තල මුහුණතට සමානව කපන ලද ඕනෑ ම කැපුම් 2ක් මගින් ලබා ගත් ඡින්නක (පෙත්තක) වල ගෝලයෙන් හා සිලින්ඩරයෙන් ලැබෙන කොටස්වල වක්‍ර පෘෂ්ඨවල වර්ගඵලය සමාන වේ."



රූපයේ පෙන්වා ඇති ගෝලයේ $PQRS$ වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය සිලින්ඩරයේ $ABCD$ වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලයට සමාන වේ.



මේ නිසා ආකිමිඩීස් ඉදිරිපත් කළ ඉහත සම්බන්ධතාවයට අනුව ගෝලයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය පරිසිලින්ඩරයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලයට සමාන වේ.

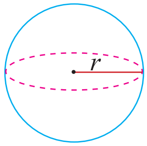
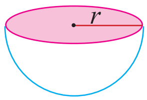
පරිසිලින්ඩරයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= 2\pi r h$

$= 2\pi r \times 2r \quad (\because h = 2r)$

$= 4\pi r^2$

$\therefore$ ගෝලයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය A නම්,

$$A = 4\pi r^2$$

	ඝන වස්තුවේ නම	පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සඳහා සූත්‍රය
	ගෝලය	$A = 4\pi r^2$
	ඝන අර්ධ ගෝලය	$A = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$

නිදසුන 1

අරය 14 cm ක් වූ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය ගණනය කරන්න.

ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 2464$

$\therefore$ ගෝලයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 2464 cm^2 වේ.

නිදසුන 2

පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 5544 cm^2 වූ ගෝලයක අරය සොයන්න.

ගෝලයේ අරය r යැයි ගනිමු.

එවිට, $4\pi r^2 = 5544$

$4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 5544$

$r^2 = \frac{5544 \times 7}{22 \times 4}$

$r^2 = 441$

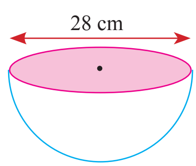
$r = \sqrt{441}$

$= 21$

$\therefore$ ගෝලයේ අරය 21 cmකි.

4.2 අභ්‍යාසය

1. අරය 7 cm වූ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.
2. අරය 10.5 cm වූ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.
3. රූපයේ දැක්වෙන ඝන අර්ධ ගෝලයේ විෂ්කම්භය 28 cmකි. එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.



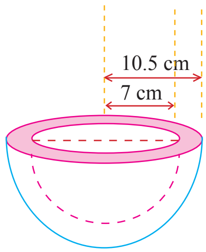
4. අභ්‍යන්තර අරය 3.5 cm වූ කුහර අර්ධ ගෝලයක අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

5. අරය 7 cm වූ ඝන ලෝහ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය හා අරය 3.5 cm වූ ඝන ලෝහ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය අතර අනුපාතය සොයන්න.

6. බාහිර පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 2772 cm^2 ක් වූ කුහර අර්ධ ගෝලයක බාහිර අරය ගණනය කරන්න.

7. පිත්තල ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 2464 cm^2කි. එම ගෝලයේ විෂ්කම්භය සොයන්න.

8. රූපයේ දැක්වෙන කුහර අර්ධ ගෝලයේ බාහිර අරය 10.5 cmකි. එහි අභ්‍යන්තර අරය 7 cm කි. ගෝලයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.



සාරාංශය

- ආධාරකයේ අරය r ද ඇල උස l ද වූ සෘජු වෘත්ත කේතුවක මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය A නම්, $A = \pi rl + \pi r^2$
- අරය r වූ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය A නම්, $A = 4\pi r^2$ වේ.

5 පරිමාව

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- සෘජු වෘත්ත කේතුවක පරිමාව ගණනය කිරීමට
- ගෝලයක පරිමාව ගණනය කිරීමට

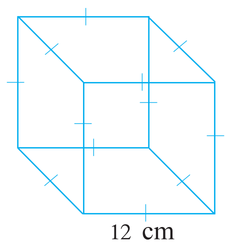
හැකියාව ලැබේ.

මීට පෙර ඔබ විසින් අධ්‍යයනය කර ඇති පරිමාව පිළිබඳ සංකල්පය නැවත සිහියට නගා ගැනීම සඳහා පහත දක්වා ඇති පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසයෙහි යෙදෙන්න.

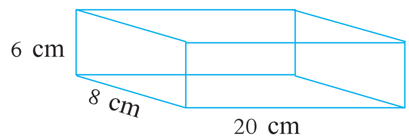
පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. දී ඇති මිනුම් ඇසුරෙන් පහත දක්වා ඇති ඝන වස්තුවල පරිමාව ගණනය කරන්න.

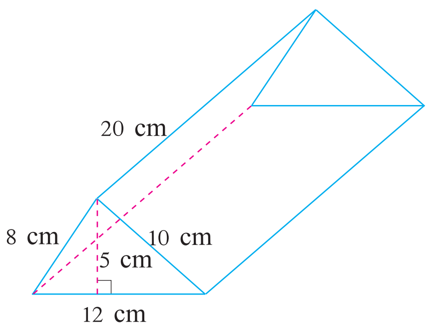
(i)



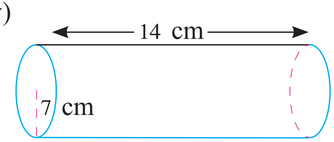
(ii)



(iii)



(iv)



2. හරස්කඩ වර්ගඵලය 20 cm^2 ද පරිමාව 320 cm^3ක් ද වූ ත්‍රිකෝණ ප්‍රිස්මයක දිග කොපමණ ද?

3. අරය 7 cm වූ හිස් සිලින්ඩරාකාර බඳුනකට ජලය 6160 cm^3ක් දැමූ විට ජල කඳේ උස කොපමණ වේ ද?

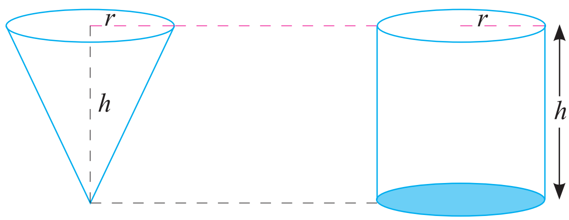
4. දිග, පළල, උස පිළිවෙළින් 16 cm, 5 cm, 4 cm වූ ඝනකාභ හැඩැති ලෝහ කුට්ටියක් උණු කර ලෝහ අපතේ නොයන පරිදි පැත්තක දිග 4 cm වූ ලෝහ ඝනක කොපමණ සෑදිය හැකි ද?

5.1 සෘජු වෘත්ත කේතුවක පරිමාව

සෘජු වෘත්ත කේතුවක් යනු කුමක් දැයි ඔබ මීට පෙර අධ්‍යයනය කර ඇත. සෘජු වෘත්ත කේතුවක පරිමාව සඳහා සූත්‍රයක් ගොඩ නැගීම සඳහා පහත දක්වා ඇති ක්‍රියාකාරකමෙහි නිරත වන්න.

ක්‍රියාකාරකම 1

පියවර 1 - පහත රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට සමාන අර සහ සමාන උස සහිත ආධාරකය (පතුල) රහිත කේතුවකුත් පතුල සහිත මුත් පියන රහිත සිලින්ඩරයකුත් කාඩ්බෝඩ් භාවිතයෙන් සකස් කර ගන්න.



(r හා h සඳහා අභිමත දිගක් යොදා ගත හැකි ය.)

පියවර 2 - සාදා ගත් කේතු හැඩති භාජනය සිහින් වැලිවලින් සම්පූර්ණයෙන් පුරවා ගන්න. එසේ පුරවා ගත් සිහින් වැලි සියල්ල සිලින්ඩරාකාර භාජනයට දමන්න. සිලින්ඩරාකාර භාජනය සම්පූර්ණයෙන් පිරවීමට මේ ආකාරයට කේතු හැඩැති භාජනයෙන් කී වරක් වැලි දැමිය යුතු යැයි නිරීක්ෂණය කරන්න.

සිලින්ඩරාකාර භාජනය සම්පූර්ණයෙන් පිරවීමට කේතු හැඩැති භාජනයෙන් තුන් වාරයක් සිහින් වැලි පුරවා දැමිය යුතු බව ඔබට ඉහත ක්‍රියාකාරකමේ දී නිරීක්ෂණය කිරීමට හැකියාව ලැබෙනු ඇත. ඒ අනුව,

කේතුවේ පරිමාව $\times 3 =$ සිලින්ඩරයේ පරිමාව

කේතුවේ පරිමාව $= \frac{1}{3} \times$ සිලින්ඩරයේ පරිමාව

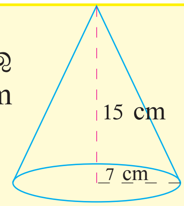
අරය r ද උස h ද වූ සිලින්ඩරයක පරිමාව $\pi r^2 h$ මගින් ලැබෙන බව 4 වන ශ්‍රේණියේ දී ඔබ විසින් හදාරා ඇත. එම නිසා අරය r ද උස h ද වූ කේතුවක පරිමාව $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ මගින් ලැබිය යුතු වේ.

කේතුවේ පරිමාව $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

මෙම පාඩමේ ගණනය කිරීම්වල දී $\pi = \frac{22}{7}$ ලෙස භාවිත කරනු ලැබේ.

නිදසුන 1

පහත රූපයේ දක්වා ඇත්තේ උපන්දින සාදයක් සඳහා සාදන ලද කේතු ආකාරයේ කේක් ගෙඩියක ආකෘතියකි. එහි අරය 7 cm හා උස 15 cm ද වේ නම් පරිමාව ගණනය කරන්න.



$$\text{කේතුවේ පරිමාව} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

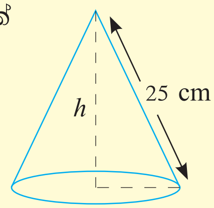
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 15$$

$$= 770 \text{ cm}^3$$

$\therefore$ කේක් ගෙඩියේ පරිමාව 770 cm^3 වේ.

නිදසුන 2

ආධාරකයේ පරිධිය 44 cm වූ ද ඇල උස 25 cmක් වූ ලෝහ කේතුවක් රූපයේ දැක්වේ.



(i) කේතුවේ අරය සොයන්න.
(ii) කේතුවේ ලම්බ උස සොයන්න.
(iii) කේතුවේ පරිමාව ගණනය කරන්න.

(i) ආධාරක වෘත්තයේ පරිධිය $= 2\pi r$

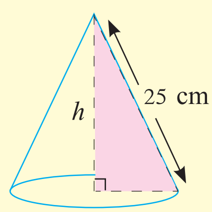
$$44 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$\frac{44 \times 7}{22 \times 2} = r$$

$$7 = r$$

$\therefore$ කේතුවේ අරය 7 cm වේ.

(ii) අඳුරු කර දක්වා ඇති සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් සම්බන්ධය යෙදීමෙන්,



$$25^2 = 7^2 + h^2$$

$$25^2 - 7^2 = h^2$$

$$(25 - 7)\,(25 + 7) = h^2$$ (වර්ග 2ක අන්තරයේ සාධක භාවිතයෙන්)

$$18 \times 32 = h^2$$

$$576 = h^2$$

$$\sqrt{576} = h$$

$$24 \text{ cm} = h$$

$\therefore$ කේතුවේ ලම්බ උස 24 cm කි.

(iii) කේතුවේ පරිමාව $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$

$= 1232 \text{ cm}^3$

$\therefore$ කේතුවේ පරිමාව 1232 cm^3 කි.

නිදසුන 3

අරය 10.5 cm ද පරිමාව 1155 cm^3 ද වූ ඍජු කේතුවක උස සොයන්න.

කේතුවේ උස h ලෙස සලකා, කේතුවක පරිමාව $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$1155 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \times h \qquad (10.5 = \frac{21}{2})$$

$$1155 = \frac{11 \times 21 \times h}{2}$$

$$\frac{1155 \times 2}{11 \times 21} = h$$

$$10 = h$$

$\therefore$ කේතුවේ උස 10 cm කි.

5.1 අභ්‍යාසය

1. ලෝහවලින් තනන ලද අරය 7 cm ද උස 9 cm ද වන කේතුවක පරිමාව සොයන්න.
2. විෂ්කම්භය 12 cm ද උස 28 cm ද වන කේතුවක පරිමාව සොයන්න.
3. පතුලේ අරය 12 cm ද ඇල උස 13 cm ද වන කේතුවක
   (i) උස සොයන්න.
   (ii) පරිමාව $754\frac{2}{7} \text{ cm}^3$ බව පෙන්වන්න.
4. පතුලේ පරිධිය 66 cmක් ද ඍජු උස 12 cm ද වූ ඍජු වෘත්ත කේතුවක
   (i) අරය සොයන්න. (ii) පරිමාව සොයන්න.
5. පරිමාව 2079 cm^3 ද අරය 10.5 cm ද වූ කේතුවක ඍජු උස සොයන්න.
6. පරිමාව $33\ 264 \text{ cm}^3$ක් ද ඍජු උස 72 cm ද වූ කේතුවක අරය සොයන්න.
7. පතුලේ පරිධිය 44 cmක් වූ සිලින්ඩරයක පරිමාව 33264 cm^3 වේ. එම සිලින්ඩරයේ අරය හා උස ඇති කේතුවක,
   (i) පතුලේ අරය සොයන්න. (ii) ඍජු උස සොයන්න.
8. අරය 7 cm ද උස 27 cm ද වූ ඝන ලෝහ සිලින්ඩරයක් උණු කර අරය 3.5 cm ක් ද උස 12 cmක් ද වූ කේතු කීයක් සෑදිය හැකි ද?

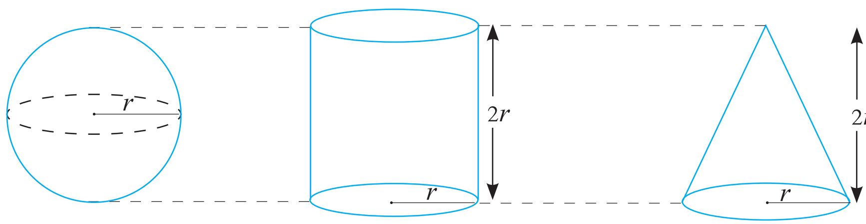
5.2 ගෝලයක පරිමාව

ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සෙවීම සඳහා යොදා ගත් පරිසිලින්ඩරය ම භාවිත කරමින් ගෝලයක පරිමාව ද ලබා ගන්නා ආකාරය ආකිමිඩීස් නම් ගණිතඥයා විසින් පැහැදිලි කර ඇත. එම ක්‍රමය අනුව සැලසුම් කර ඇති පහත ක්‍රියාකාරකමෙහි යෙදෙන්න.

ක්‍රියාකාරකම 2

පියවර 1 - කුඩා බෝලයක් සපයා ගන්න.

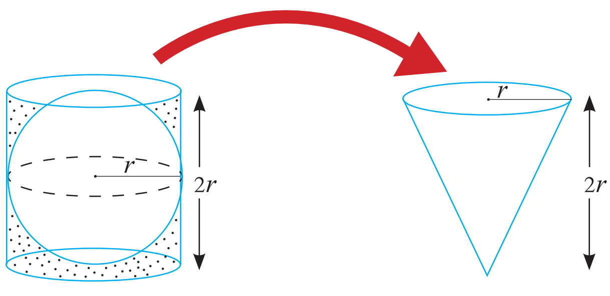
පියවර 2 - ගුරුතුමාගේ ද සහාය ඇති ව ඔබ සපයා ගත් බෝලයේ අරයට සමාන අරයක් සහ විෂ්කම්භයට සමාන උසක් ඇති පතුල සහ පියන රහිත සිලින්ඩරයක් ද ගෝලයේ අරයට සමාන අරයක් ඇති ගෝලයේ විෂ්කම්භයට සමාන උසක් ඇති පතුල රහිත කේතුවක් නිර්මාණය කරන්න.



පියවර 3 - දැන් ගෝලය සීරුවෙන් සිලින්ඩරය තුළට ඇතුළු කරන්න. එවිට ගෝලයේ පරිසිලින්ඩරය තුළ මුළු අවකාශය ම අයත් කර නොගන්නා බවත් හිස් අවකාශයක් ඉතිරිව ඇති බවත් පැහැදිලි වේ.

පියවර 4 - සිලින්ඩරයේ හිස්ව ඇති ඉහළ කොටසට සිහින් වැලි පුරවා වැලි පිටත නොයන සේ ඉහළින් කාඩ්බෝඩ් කැල්ලක් තබා පරිසිලින්ඩරය අනෙක් අතට හරවා ඉතිරි කොටස ද සිහින් වැලිවලින් පුරවන්න.

පියවර 5 - දැන් පරිසිලින්ඩරය තුළ ඇති වැලි සීරුවෙන් කේතුව තුළට දමන්න.



වැලිවලින් කුහර කේතුව සම්පූර්ණයෙන් ම පිරී යන බව ඔබට නිරීක්ෂණය කිරීමට හැකි වනු ඇත.
ඉහත ක්‍රියාකාරකමට අනුව,

පරිසිලින්ඩරයේ පරිමාව = ගෝලයේ පරිමාව + කේතුවේ පරිමාව

බව ඔබට වැටහෙන්නට ඇත. ඒ අනුව පරිසිලින්ඩරයේ පරිමාවෙන් කේතුවේ පරිමාව අඩු කිරීමෙන් ගෝලයේ පරිමාව ලැබෙන බව ද ඔබට පැහැදිලි වනු ඇත. මේ අනුව,

ගෝලයේ පරිමාව = පරිසිලින්ඩරයේ පරිමාව − කේතුවේ පරිමාව

$$= \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

$h = 2r$ නිසා

$$= \frac{2}{3}\pi r^2 \times 2r$$

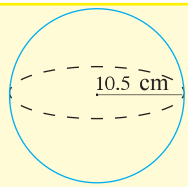
$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

අරය r වන ගෝලයක පරිමාව V නම්,

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

නිදසුන 1

අරය 10.5 cm වන ගෝලයක පරිමාව සොයන්න.



ගෝලයේ පරිමාව $= \frac{4}{3}\pi r^3$

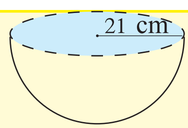
$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 10.5 \times 10.5 \times 10.5$$

$$= 4851 \text{ cm}^3$$

$\therefore$ ගෝලයේ පරිමාව 4851 cm^3 කි.

නිදසුන 2

අරය 21 cm වන ඝන අර්ධ ගෝලයක පරිමාව සොයන්න.



අර්ධ ගෝලයේ පරිමාව $= \frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{1}{2}$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21 \times \frac{1}{2}$$

$$= 19\ 404 \text{ cm}^3$$

අර්ධ ගෝලයේ පරිමාව 19 404 cm^3 කි.

නිදසුන 3

පරිමාව $905\frac{1}{7}$ cm^3 වූ ගෝලයක අරය සොයන්න.

$$\text{ගෝලයේ පරිමාව} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$905\frac{1}{7} = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3$$

$$\frac{6336}{7} = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3$$

$$\frac{6336 \times 3 \times 7}{7 \times 4 \times 22} = r^3$$

$$216 = r^3$$

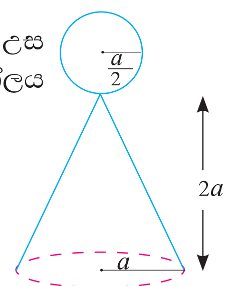
$$6^3 = r^3$$

$$6 = r$$

ගෝලයේ අරය 6 cm වේ.

5.2 අභ්‍යාසය

1. අරය 21 cm වූ ගෝලයක පරිමාව සොයන්න.
2. විෂ්කම්භය 12 cm වූ ගෝලයක පරිමාව සොයන්න.
3. අරය 3.5 cmක් වූ කුඩා වීදුරු ගෝලයක පරිමාව සොයන්න.
4. අරය 14 cmක් වූ ඝන අර්ධ ගෝලයක පරිමාව සොයන්න.
5. ගෝලයක පරිමාව $3054\frac{6}{7}$ cm^3 නම් ගෝලයේ අරය සොයන්න.
6. ඝන අර්ධ ගෝලයක පරිමාව $56\frac{4}{7}$ cm^3 නම් අර්ධ ගෝලයේ අරය සොයන්න.
7. අරය 12 cm වූ ඝන ගෝල 5ක් උණු කර ලෝහ අපතේ නොයන පරිදි අරය 4 cmක් වූ කුඩා ලෝහ ගෝල කොපමණ ප්‍රමාණයක් සෑදිය හැකි ද?
8. අරය 14 cmක් වූ ඝන අර්ධ ගෝලයක් උණු කර ලෝහ අපතේ නොයන සේ කුඩා ගෝල 4ක් සෑදිය හැකි නම් කුඩා ගෝලයක අරය සොයන්න.
9. රූපයේ දැක්වෙන කුසලානය තනා ඇත්තේ පතුලේ අරය a ද උස එමෙන් ම දෙගුණයක් $\frac{a}{2}$ වන සෘජු වෘත්ත කේතුවකට අරය ගෝලය සවි කිරීමෙනි.

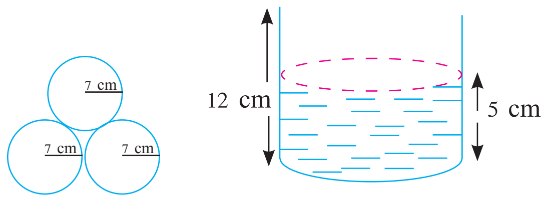


(i) කුසලානයේ උස a ඇසුරින් ලියා දක්වන්න.

(ii) කේතුවේ පරිමාව a ඇසුරින් ලියා දක්වන්න.

(iii) සම්පූර්ණ කුසලානයේ පරිමාව $\frac{5}{6}\pi a^3$ බව පෙන්වන්න.

10. රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි විෂ්කම්භය 28 cm ද උස 12 cm ද වන සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරාකාර භාජනයක 5 cm උසට ජලය පුරවා ඇත. එම ජලය සහිත බඳුනට අරය 7 cmක් වූ කුඩා ඝන ගෝල 3ක් සීරුවෙන් ගිල්වනු ලැබේ.



(i) සිලින්ඩරාකාර භාජනයේ ඇති ජල පරිමාව සොයන්න.
(ii) කුඩා ගෝලයක පරිමාව සොයන්න.
(iii) කුඩා බෝල ගිල් වූ පසු භාජනයෙන් ජලය පිටාර නොගලන බව පෙන්වන්න.

සාරාංශය

- ආධාරක වෘත්තයේ අරය r සහ සෘජු උස h වූ සෘජු වෘත්ත කේතුවක පරිමාව V නම්, $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$ වේ.
- අරය r වූ ගෝලයක පරිමාව V නම්, $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ වේ.

6 න්‍යාස

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- න්‍යාස හඳුනා ගැනීමට,
- න්‍යාස එකතු කිරීම හෝ අඩු කිරීම හඳුනා ගැනීමට,
- න්‍යාසයක් නිඛිලයකින් ගුණ කිරීමට,

හැකියාව ලැබේ.

6.1 හැඳින්වීම

ගණිතය තුළින් බිහි වූ විශිෂ්ටත ම නිර්මාණය සංඛ්‍යා පද්ධතියයි. අප කුඩා කළ සිට 1, 2, 3, ... ලෙස ගණන් කරමින් උගත් සංඛ්‍යා පද්ධතිය අදට වසර 5000කට පෙර ගංගා නිම්න ආශ්‍රිත ශිෂ්ඨාචාර තුළ ඇති වී පියවරෙන් පියවර වර්ධනය විය. ඉන්දු නිම්න ශිෂ්ඨාචාරය ආශ්‍රිත ව ශුන්‍ය (බ්‍රහ්ම ගුප්ත) අර්ථ දැක්වීමෙන් පසු සංඛ්‍යා පද්ධතිය කිසිදිනක අවසන් නොවන ගමනකට මුල පුරන ලදි.

0, 1, 2, ... මෙම නවීන සංඛ්‍යා පද්ධතිය කිසිදා අවසන් නොවන ගමනක යෙදෙමින් සංඛ්‍යා පද්ධතිය විවිධ ක්‍රමවේද ඔස්සේ ගමන් කරයි. පරිසරයේ ඇති සියලු දේ සඳහා සංඛ්‍යාත්මක වටිනාකමක් දී එම සංඛ්‍යා රැස් කිරීම, වගු ගත කිරීම, විශ්ලේෂණය කිරීම, විවරණය කිරීම සංඛ්‍යානයයි. සැලසුම්කරණය, පරිපාලනය හා බද්ධ වී ඇති සංවර්ධනයට අවශ්‍ය මඟ පෙන්වීම සංඛ්‍යා පද්ධතිය ඇසුරෙන් ගොඩ නැගුණු සංඛ්‍යානයෙන් කර දෙනු ලබයි.

දහ අටවන සියවසේ මැද භාගයේ දී බ්‍රිතාන්‍ය ජාතික ආතර් ක්ලේ මහතා විසින් සංඛ්‍යා එකතුවකින් නව විෂයයක් ගොඩනංවන ලදී. අපි එය න්‍යාස ලෙස හඳුන්වමු.

17 වන සියවසේ යුරෝපයේ ඇති වූ කාර්මික විප්ලවය ආශ්‍රිත ව ගොඩනැගුණු නව ප්‍රබෝධයක් සමඟ ම බිහි වූ ව්‍යාපාර අධ්‍යයනයට කාර්මික ව්‍යවසාය අධ්‍යයනයට නව පුනර්ජීවයක් ලැබූ රසායන විද්‍යාව, භෞතික විද්‍යාව, ඉංජිනේරු විද්‍යාව, ආර්ථික විද්‍යාව, වාණිජ කටයුතු ඉදිරියට ගෙන යෑම සඳහා නව මාවතක් ක්‍රියාකරවීමේ ශක්තිමත් උපකරණයක් ලෙස **න්‍යාස** හැඳින්වීමට පුළුවන.

සංඛ්‍යා සමූහයක් ඍජුකෝණාස්‍රයක් ලෙස සකස් කර වරහන් තුළ යෙදීම න්‍යාස ලෙස හඳුන්වයි. මෙහිදී වරහන් සඳහා ( ) හෝ [ ] භාවිත කළ හැකි ය. න්‍යාසයක ඇති සංඛ්‍යා එහි අවයව ලෙස හඳුන්වයි.

නිදසුන 1

මාලා ළඟ පොත් 5ක් සහ පෑන් 3ක් ඇත. එය න්‍යාසයකින් දක්වන්න.

$(5 \quad 3)$ හෝ $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ලෙස දැක්විය හැකි ය.

නිදසුන 2

අමල් ළඟ පොත් 4ක් පෑන් 5ක් සහ පැන්සල් 2ක් ඇත. මෙය න්‍යාසයකින් දක්වන්න.

$(4 \quad 5 \quad 2)$ හෝ $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ලෙස දැක්විය හැකි ය.

නිදසුන 3

රවී ළඟ පොත් 6ක් සහ පෑන් 2ක් ඇත. රුවන් ළඟ පොත් 3ක් සහ පෑන් 5ක් ඇත. මෙය න්‍යාසයකින් දක්වන්න.

$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ හෝ $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ලෙස දැක්විය හැකි ය.

නිදසුන 4

අමර ළඟ අඹ ගෙඩි 5ක් දොඩම් ගෙඩි 7ක් සහ අන්නාසි ගෙඩි 2ක් ඇත. කමල් ළඟ අඹ ගෙඩි 2ක් දොඩම් ගෙඩි 5ක් සහ අන්නාසි ගෙඩි 3ක් ඇත. මෙය න්‍යාසයකින් දක්වන්න.

$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ හෝ $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ලෙස දැක්විය හැකි ය.

න්‍යාසයක් ඉංග්‍රීසි හෝඩියේ කැපිටල් අකුරුවලින් සංකේත කරයි.

$A = (5 \quad 3)$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad E = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

න්‍යාසයක ගණය

න්‍යාසයේ තිරස් ලෙස ඇති සංඛ්‍යා පේළි ලෙස ද සිරස් ලෙස ඇති සංඛ්‍යා තීර ලෙස ද හඳුන්වනු ලැබේ. පේළි m ලෙස ද තීර n ලෙස ද ගෙන $m \times n$ ලෙස ලියූ විට එය න්‍යාසයේ ගණය ලෙස හඳුන්වයි.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ න්‍යාසය සලකන්න.

පේළි ගණන $= 2$ $\qquad$ තීර ගණන $= 3$

ගණය $= 2 \times 3$ මෙම ගුණිතය ''දෙකේ තුනේ'' න්‍යාසයක් ලෙස හඳුන්වයි. එය

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ ලෙස දක්වයි.

6.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන න්‍යාසවල ගණය ලියා දක්වන්න.

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ (ii) $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ (iii) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (iv) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(v) $E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (vi) $F = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ (vii) $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (viii) $H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

6.2 න්‍යාස වර්ග

න්‍යාසයක ඇති පේළි, තීර සහ අවයව පිහිටා ඇති ආකාරය ආදි කරුණු පදනම් කර ගනිමින් න්‍යාස වර්ග කීපයකට වෙන් කළ හැකි ය.

- පේළි න්‍යාස
- තීර න්‍යාස
- සමචතුරස්‍ර න්‍යාස
- ඒකක න්‍යාස
- සමමිතික න්‍යාස

පේළි න්‍යාසය

න්‍යාසයක එක පේළියක් පමණක් ඇති නම් ඒවා පේළි න්‍යාසය වේ.

නිදසුන 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}_{1 \times 2}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{1 \times 3}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}_{1 \times n}$

තීර න්‍යාසය

න්‍යාසයක එක තීරයක් පමණක් ඇති නම් එය තීර න්‍යාසය වේ.

නිදසුන 2

$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$ $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$ $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ . \\ . \\ n \end{pmatrix}_{n \times 1}$

සමචතුරස්‍ර න්‍යාසය

පේළි ගණන සහ තීර ගණන සමාන න්‍යාස සමචතුරස්‍ර න්‍යාසය වේ.

නිදසුන 3

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයකට විකර්ණ දෙකක් ඇත. ඒවා නම් ප්‍රධාන විකර්ණය සහ ද්විතියික විකර්ණය යි.

ද්විතියික විකර්ණය

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ප්‍රධාන විකර්ණය

ඒකක න්‍යාසය

සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක ප්‍රධාන විකර්ණයේ පිහිටි සියලු අවයවවල අගය 1 වේ නම් හා අනෙක් අවයවවල අගය 0 වේ නම් එවැනි න්‍යාසයක් ඒකක න්‍යාසයක් වේ. ඒකක න්‍යාස I මගින් සංකේත කරයි.

නිදසුන 4

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

සමමිති න්‍යාසය

සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක ප්‍රධාන විකර්ණය වටා සමාන අවයව සමමිතික ව පිහිටන න්‍යාස සමමිති න්‍යාස වේ.

නිදසුන 5

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \\ 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

6.2 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන න්‍යාස පේළි න්‍යාස ලෙස හා තීර න්‍යාස ලෙස වෙන් කර දක්වන්න.

(i) $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ii) $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ (iii) $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}$

(iv) $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (v) $E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. පහත න්‍යාස අතරින් සමමිතික න්‍යාස, ඒකක න්‍යාස තෝරා ලියන්න.

(i) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $Q = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

(iii) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $S = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

සංඛ්‍යා පද්ධතිය ඇසුරෙන් ලබා ගත් නව නිර්මාණයක් වන න්‍යාස සඳහා ද විජ ගණිත ක්‍රමවේද යෙදිය හැකි ය.

- න්‍යාස සමානතාව
- න්‍යාස අන්තරය
- න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම
- න්‍යාස ඓක්‍යය
- න්‍යාස ගුණිතය

6.3 න්‍යාස එකතු කිරීම හෝ අඩු කිරීම

න්‍යාස දෙකක් එකතු කිරීමට හෝ අඩු කිරීමට එම න්‍යාසවල ගණය සමාන විය යුතු ය. න්‍යාස දෙකක් එකතු කිරීමේ දී සිදු කරන්නේ න්‍යාසවල අනුරූප අවයව එකතු කිරීමයි. න්‍යාස දෙකක් අඩු කිරීමේ දී සිදු කරන්නේ න්‍යාසවල අනුරූප අවයව අඩු කිරීමයි.

නිදසුන 1

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}_{1 \times 2}$ සහ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}_{1 \times 2}$ නම් $A + B$ සොයන්න.

$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}_{1 \times 2} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}_{1 \times 2}$

$A + B = \begin{pmatrix} 3+1 & 4+2 \end{pmatrix}_{1 \times 2}$

$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}_{1 \times 2}$

නිදසුන 2

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ සහ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ නම් $A + B$ සොයන්න.

$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+4 \\ 3+2 & 2+3 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

නිදසුන 3

$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix}$ සහ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ නම් $A - B$ සොයන්න.

$A - B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} 5-1 & 4-2 \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$

නිදසුන 4

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{සහ} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ නම් $A - B$ සොයන්න.

$$A - B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 5-1 & 4-2 \\ 3-1 & 2-1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

න්‍යාස සමානතාව

න්‍යාස දෙකක් සමාන වීම සඳහා තිබිය යුතු ගුණාංග,

- න්‍යාස දෙකේ ම ගණය සමාන විය යුතු ය.
- න්‍යාස දෙකේ ම අනුරූප අවයව සමාන විය යුතු ය.

නිදසුන 5

$A = (5 \quad 4)_{1 \times 2}$ $\qquad$ $B = (5 \quad 4)_{1 \times 2}$

ගණය සමාන වේ. අවයව සමාන වේ. $\therefore \; A = B$

නිදසුන 6

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

ගණය සමාන වේ. අවයව සමාන වේ. $\therefore \; A = B$ වේ.

නිදසුන 7

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

ගණය සමාන වේ. අවයව සමාන වේ. $\therefore \; A = B$ වේ.

නිදසුන 8

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

ගණය සමාන නොවේ. $\therefore \; A \neq B$ වේ.

නිදසුන 9

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ගණය සමාන වේ. අනුරූප අවයව සමාන නොවේ. $\therefore$ $A \neq B$ වේ.

නිදසුන 10

$A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ p & t \end{pmatrix}$ හා $B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $A = B$ නම් a, p, t හි අගය සොයන්න.

$A = B$ නිසා, අනුරූප අවයව සමාන වේ.

$a = -7, \quad p = 2, \quad t = 4$

නිදසුන 11

$A = \begin{pmatrix} x + y & 2y \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ වේ. මෙහි $A = B$ නම් x සහ y සොයන්න.

අනුරූප අවයව සමාන කිරීමෙන්, $x + y = 5$ ——— (1)

$2y = 6$ ——— (2)

(2) $\div 2$ $\quad \dfrac{2y}{2} = \dfrac{6}{2}$

$y = 3$

y හි අගය (1)ට ආදේශයෙන්, $x + y = 5$

$x + 3 = 5$

$x = 5 - 3$

$x = 2$

$x = 2$ හා $y = 3$ වේ.

නිදසුන 12

$A = \begin{pmatrix} x & x + y \\ a & b \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ a & b \end{pmatrix}$ මෙහි $A = B$ වේ නම්, x සහ y සොයන්න.

මෙහි ගණය $= 2 \times 2$ වේ.

$A = B$ නිසා, අනුරූප අවයව සමාන වේ.

$x = 3$

$x + y = 5$

x හි අගය ආදේශයෙන්,

$3 + y = 5$

$y = 5 - 3 = 2$

$x = 3$ සහ $y = 2$ වේ.

6.4 න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම

න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම අර්ථ දක්වන්නේ න්‍යාසයේ සෑම අවයවයක් ම එම සංඛ්‍යාවෙන් ගුණ කිරීම ලෙසයි.

නිදසුන 1

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ නම් $2A$ සොයන්න.

$$2A = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 & -1 \times 2 \\ 0 \times 2 & 2 \times 2 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

නිදසුන 2

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ නම් $-3A$ සොයන්න.

$$-3A = -3\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-3A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

6.3 අභ්‍යාසය

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $A = B$ වේ ද හේතු දක්වන්න.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A = B$ නම් a, b, c, d සොයන්න.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ සහ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ නම්

   (i) $A + B$ (ii) $A - B$ (iii) $2A + B$

   (iv) $A - 2B$ (v) $3A - 2B$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ සහ $2A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ නම් B සොයන්න.

5. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ නම් x සොයන්න.

7 සූත්‍ර

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,

- සූත්‍රයක වර්ගායිතය හා වර්ගමූලය දුන් විට උක්තය වෙනස් කිරීමට,
- සූත්‍රයක එක් අඥාතයක් හැර අනෙක් ඒවායේ අගය දන්නා විට නොදන්නා අඥාතයේ අගය සෙවීමට

හැකියාව ලැබේ.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. $P = qt$ සූත්‍රයේ t උක්ත කරන්න.
2. $P = q + x$ සූත්‍රයේ x උක්ත කරන්න.
3. $v = u + at$ සූත්‍රයේ a උක්ත කරන්න.
4. $\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$ සූත්‍රයේ $\left(\frac{1}{v}\right)$ උක්ත කරන්න.
5. $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ සූත්‍රයේ r_1 උක්ත කරන්න.
6. $v = 7,\ u = 5$ නම් $t = \frac{v + u}{2}$ හි t අගය ලබා ගන්න.
7. $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ සූත්‍රයේ $u = 1,\ t = 1,\ a = 0$ හි s අගය සොයන්න.
8. $p^2 = q^2 + r^2$ හි $r = 2$ හා $q = 3$ නම් p^2 සොයන්න.
9. $C = kt + m$ හි $C = 12,\ m = 4,\ k = 2$ නම් t සොයන්න.

7.1 වර්ගයන් හා වර්ගමූලයන් ඇතුළත් සූත්‍රවල උක්තය වෙනස් කිරීම

★ $A^2 = x$ ලෙස දී ඇති විට $A = \pm\sqrt{x}$ ලෙස ලියනු ලැබේ.

★ A සඳහා $+\sqrt{x}$ හා A සඳහා $-\sqrt{x}$ ලැබේ.

නිදසුන 1

වෘත්තයක වර්ගඵලය A හා එහි අරය r වේ. එවිට, $A = \pi r^2$ වේ. මෙහි r උක්ත කරමු.

$A = \pi r^2$

පියවර 1 - $A = \pi r^2$

$$\frac{A}{\pi} = \frac{\pi r^2}{\pi} \quad \text{(දෙපසම } \pi \text{ වලින් බෙදීමෙන්)}$$

පියවර 2 - r උක්ත කිරීම සඳහා දෙපසෙහි ම වර්ගමූලය ගනිමු.

$$r^2 = \frac{A}{\pi}$$

$$\sqrt{r^2} = \pm\sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

r යනු දිගක් බැවින් එය සෘණ අගයක් විය නොහැකි ය. එබැවින් $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ වේ.

සටහන

$p = \sqrt{\frac{l}{m}}$ හි වර්ගමූලය ඉවත් කිරීමට දෙපස වර්ග කළ යුතු වේ.

$$p = \sqrt{\frac{l}{m}}$$

$$p^2 = \left(\sqrt{\frac{l}{m}}\right)^2$$

$$p^2 = \left(\frac{l}{m}\right)^{\frac{1}{2}\times 2}$$

$$p^2 = \frac{l}{m}$$

නිදසුන 2

$v = \sqrt{u^2 + 2as}$ සමීකරණයේ u උක්ත කරමු.

$$v = \sqrt{u^2 + 2as}$$

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$v^2 - 2as = u^2$$

$$u^2 = v^2 - 2as$$

$$u = \pm\sqrt{v^2 - 2as}$$

7.1 අභ්‍යාසය

1. $4\sqrt{k} = t$ නම් k උක්ත කරන්න.

2. $\frac{T^2}{2\pi} = \frac{l}{g}$ හි T උක්ත කරන්න.

3. $v^2 = u^2 + 2fs$ හි v උක්ත කරන්න.

4. $a^2 = b^2 + c^2$ හි b උක්ත කරන්න.

5. $S = up + \frac{1}{2} aT^2$ හි T උක්ත කරන්න.

6. $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ හි r උක්ත කරන්න.

7. $A = \pi r (h^2) + x^2$ හි h උක්ත කරන්න.

8. $A = \pi (R^2 - r^2)$ හි R උක්ත කරන්න.

9. $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ හි l උක්ත කරන්න.

10. $3 + k^2 = pt$ නම් k උක්ත කරන්න.

7.2 ආදේශ මගින් අගය සෙවීම

නිදසුන 1

$v = u + at$ සූත්‍රයේ $u = 10,\ a = 5,\ t = 1$ නම් v අගය ලියන්න.

$v = u + at$
$v = 10 + (5 \times 1)$
$v = 10 + 5$
$v = 15$

නිදසුන 2

$v^2 = a^2 (x^2 - p^2)$ සූත්‍රයේ $a = 1,\ x = 5,\ p = 4$ නම් v සොයන්න.

$v^2 = a^2 (x^2 - p^2)$
$v^2 = 1\ (5^2 - 4^2)$
$v^2 = 1\ (25 - 16)$
$v^2 = 9$
$v = \pm\sqrt{9}$
$v = \pm\ 3$

7.2 අභ්‍යාසය

1. $y = mx + c$ හි $m = 2,\ x = 1,\ c = 3$ නම් y සොයන්න.

2. $v = u + ft$ හි $v = 4,\ u = 1,\ f = 3$ නම් t සොයන්න.

3. $l = a + (n - 1)\ d$හි $l = 21,\ a = 3,\ d = 2$ නම් n සොයන්න.

4. $v^2 = u^2 + 2as$ සූත්‍රයේ $u = 4,\ a = \frac{3}{2},\ s = 3$ නම් v සොයන්න.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. පහත සඳහන් එක් එක් සූත්‍රය ඉදිරියෙන් වරහන් තුළ දක්වා ඇති පදය උක්ත කරන්න.

   (i) $V = u + at$ (a)

   (ii) $y = mx + c$ (m)

   (iii) $V^2 = u^2 + 2as$ (a)

   (iv) $x^2 = y^2 + m^2 + n$ (m)

2. $r = \sqrt{u^2 + 2as}$ හි s උක්ත කරන්න.

3. $A = (2a - R)$ හි R උක්ත කරන්න.

4. $S = \frac{n}{2}(a + l)$ හි n උක්ත කරන්න.

5. $S = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)\,d\}$ හි d උක්ත කරන්න.

6. (i) $F = \frac{9}{5}c + 32$ සූත්‍රයේ c උක්ත කරන්න.

   (ii) $F = \frac{9}{5}c + 32$ හි $c = 5$ විට F සොයන්න.

7. (i) $S = \frac{n}{2}(a + l)$ සූත්‍රයේ a උක්ත කරන්න.

   (ii) $S = \frac{n}{2}(a + l)$ සූත්‍රයේ $S = 18,\ n = 3,\ l = -2$ විට a හි අගය සොයන්න.

8. $\frac{1}{a} = \frac{1}{u} + \frac{1}{r}$ සූත්‍රයේ u හි අගය a හා r ඇසුරෙන් සොයන්න.

9. $r = \sqrt{u^2 + 2as}$ සූත්‍රයේ u හි අගය උක්ත කරන්න.

10. $V = \pi r^2 h$ හි r උක්ත කරන්න.

11. $x = a + \frac{1}{f}$ හි f උක්ත කරන්න.

12. $y = f + \frac{1}{a}$ හි f උක්ත කරන්න.

13. $x = \frac{2p + 1}{2p - 1}$ නම් $\frac{x + 2}{x - 1}$ හි අගය p ඇසුරෙන් සොයන්න.

14. $z^2 = (x^2 + y^2)$ නම් $x = 4,\ y = 5$ ලෙස ගෙන z^2 සොයන්න.

8 පයිතගරස් ප්‍රමේයය

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- පයිතගරස් ප්‍රමේයය හඳුනා ගැනීමට,
- පයිතගරස් සම්බන්ධය ඇසුරෙන් ගණනය කිරීම්වල යෙදීමට,

හැකියාව ලැබේ.

8.1 හැඳින්වීම

අලුත් පිරිවෙන් ශාලාව සෑදීමට පැමිණි පෙදරේරුවෙකු ගෙපළ කැපීමට පෙර ලණු ඇදීම ආරම්භ කළ මොහොතේ සිට චන්දිම පොඩි හාමුදුරුවන් ඒ දෙස බලා සිටී. ඔවුන් අතර ඇති වූ සංවාදය පහත වේ.

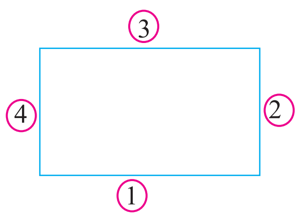
පොඩි හාමුදුරුවෝ - මාමේ ගෙපළ කැපීමට පෙර ලණු අදින්නේ ඇයි?

පෙදරේරු මාමා - පොඩි හුමුදුරුවන්ට තේරෙන්නේ නැත්තේ ඇයි? ලණුවක් ඇද ඇති විට හරි කෙළින් ගෙපළ කපා ගන්න පුළුවන්.

පොඩි හාමුදුරුවෝ - එතකොට මේ පැත්තට සමාන දිගක් අනෙක් පැත්තේ තියෙනවා කියල මාමා කොහොමද කියන්නේ.

පෙදරේරු මාමා - මට තේරුනේ නෑ පොඩි හාමුදුරුවෝ කියන දේ.

පොඩි හාමුදුරුවෝ - ඉන්නකෝ මම බිම ඒක ඇඳලා පෙන්වන්න.
එහෙම කියපු පොඩි හාමුදුරුවෝ චතුරස්‍රයක් බිම ඇඳ පැති හතර 1, 2, 3 හා 4 ලෙස නම් කරයි.



පොඩි හාමුදුරුවෝ - මාමා කියන්නේ කොහොම ද (1) පැත්ත සහ (2) පැත්ත සෘජුකෝණී බව, ඒ වගේම (2) පැත්ත සහ (4) පැත්ත රේල් පාර වගේ හරි කෙළින්ම යන බව,

පෙදරේරු මාමා - ආ ඒකට අපිට කියා දී තියෙනවා ලණු ඇදීමට පෙර මුලු පරස් අරින්න කියලා. ඒක තමයි අපි 3, 4, 5 ක්‍රමය භාවිත කළේ.

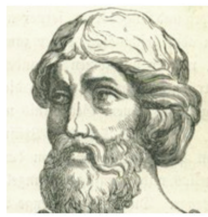
චන්දිම පොඩි හාමුදුරුවන්ට එය තේරුනේ නෑ. '' මුලු පරස් අරින්න'' ඒ ගැන ඇසීමට චන්දිම පොඩි හාමුදුරුවන්ට බැරි විය. එයට හේතුව පිරිවෙණ පටන් ගන්න සීනුව නාද වුණ නිසා ය.

චන්දිම පොඩි හාමුදුරුවෝ ගණිත ගුරුතුමාගෙන් මෙසේ ඇසුවේ ය.

පොඩි හාමුදුරුවෝ - මොකක් ද සර් මුලු පරස් අරිනවා කියන්නේ.
ගුරුතුමා - ආ ඒක ද? මම ඒ ගැන අද පන්තියේදී කියල දෙන්නම්.

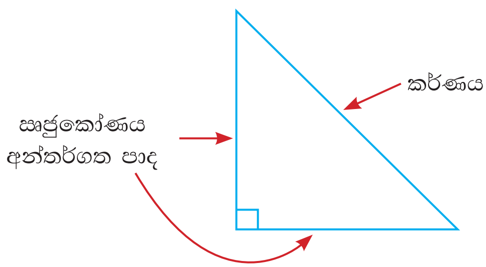
එසේ කියූ ගුරුතුමා පන්තියේ දී අද ඉගෙන ගන්න පාඩමේ නම ලියන්න ළමයි කියල **''පයිතගරස් ප්‍රමේයය''** යැයි කළු ලෑල්ලේ ලිව්වේ ය.

චන්දිම පොඩි හාමුදුරුවන්ට තවත් ප්‍රශ්නයක් ඇති වුණි. සර් කිවුවේ මුලු පරස් අරිනවා කියන වචනයේ තේරුම කියනවා කියල දැන් ''පයිතගරස් ප්‍රමේයය'' කියල අලුත් පාඩමක් පටන් ගත්තා, මේ දෙක අතර ඇති සම්බන්ධය කුමක් ද? ගුරුතුමා මෙලෙස පාඩම ආරම්භ කරන ලදි.



ක්‍රි.පූ. 6 වන සියවසේ දී පයිතගරස් නම් ග්‍රීක ගණිතඥයා විසින් සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණවල පාදවල දිග අතර පවත්නා ජ්‍යාමිතික සම්බන්ධතාවක් ඉදිරිපත් කරන ලදි. ඒ කාලයට පෙරත් ඉන්දියාවේ පැවති නොයෙක් ශිෂ්ඨාචාර අතර ද එම සම්බන්ධතාව දැන සිටි බවට සාක්ෂි ඇතත් මෙම සම්බන්ධතාව මුල්වරට ජ්‍යාමිතිකව සාධනය කරන්නට ඇත්තේ පයිතගරස් නම් විද්‍යාඥයා විසින් යැයි කියා ගුරුතුමා පාඩම විස්තර කළේ ය.

මෙම සම්බන්ධය හඳුනා ගැනීමට ප්‍රථම සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණවල පාද හඳුනා ගැනීම වැදගත් බව ගුරුතුමා පවසන ලදි. ඉන් පසු ඔහු සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් කළු ලෑල්ල මත ඇඳ පහත දැක්වෙන පරිදි එහි පාද නම් කළේ ය.



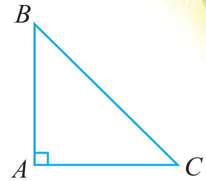
ගුරුතුමා කළු ලෑල්ල මත පහත දැක්වෙන කරුණු ද ලියා දක්වන ලදි.

- ත්‍රිකෝණයක එක් කෝණයක් 90^{o} වේ නම්, එම ත්‍රිකෝණ සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ වේ.
- සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක සෘජුකෝණයට සම්මුඛව පිහිටි පාදය කර්ණය වේ.
- කර්ණය හැර සෙසු පාද සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ සෘජුකෝණය අන්තර්ගත පාද වේ.
- සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ දිගම පාදය කර්ණය වේ.
- සෘජුකෝණය හැර ඉතිරි කෝණවල එකතුව 90^{o} වේ.

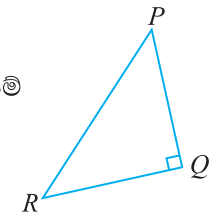
මෙලෙස ගුරුතුමා පාඩම වෙනතකට යොමුකර සිසුන්ගේ කුතුහලය තවත් වැඩි කළේ ය.

8.1 අභ්‍යාසය

1. රූපයේ දක්වා ඇති ත්‍රිකෝණයේ සෘජුකෝණය අඩංගු පාද දෙක හා කර්ණය නම් කරන්න.



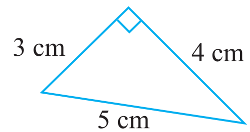
2. දී ඇති ත්‍රිකෝණයේ සෘජුකෝණය අඩංගු පාද දෙක හා කර්ණය නම් කරන්න.



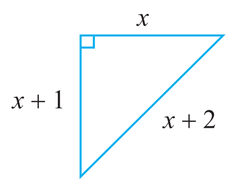
3. (i) සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් ඇඳ එහි කර්ණය x ලෙස නම් කරන්න. සෘජුකෝණය අඩංගු පාද දෙක y හා z ලෙස නම් කරන්න.

   (ii) සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් අඳින්න. එහි කර්ණය a ලෙස ද සෘජුකෝණය අඩංගු පාද දෙක b හා c ලෙස නම් කරන්න.

4. දී ඇති ත්‍රිකෝණය සළකන්න. හිස්තැනට ගැළපෙන අගය වරහන් තුළින් තෝරා ලියන්න.
   මෙම ත්‍රිකෝණයේ කර්ණයේ දිග වනුයේ .... ය.
   (3 cm, 4 cm, 5 cm)



5. දී ඇති ත්‍රිකෝණයට අනුව හිස්තැනට ගැළපෙන අගය වරහන් තුළින් තෝරා ලියන්න.
   මෙම ත්‍රිකෝණයේ කර්ණයේ දිග වනුයේ .... ය.
   [x cm, (x+1) cm, (x+2) cm]

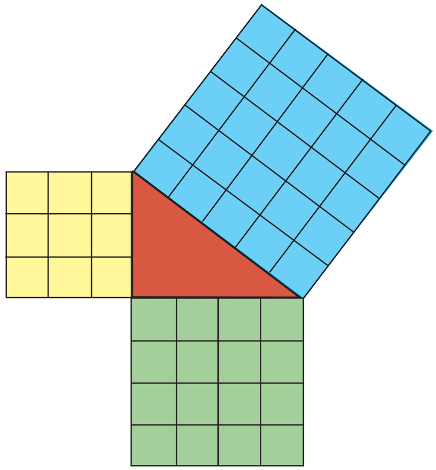


8.2 පයිතගරස් ප්‍රමේයය

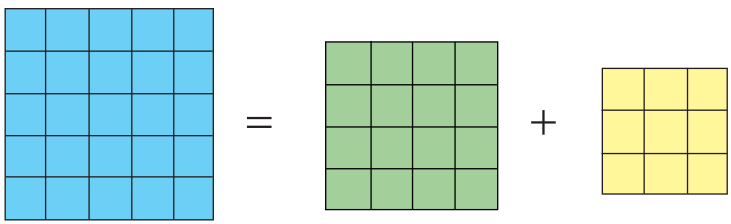
සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක පාද අතර පවතින සම්බන්ධයක් පහත පරිදි ප්‍රමේයයක් ලෙස ඉදිරිපත් කරමු.

ප්‍රමේයය

සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක කර්ණය මත ඇඳ ඇති සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය, සෘජුකෝණය අඩංගු ඉතිරි පාද දෙක මත ඇඳ ඇති සමචතුරස්‍රවල වර්ගඵලවල එකතුවට සමාන වේ.



මෙහි රතුපාටින් පෙන්වා ඇති සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය මත ඇඳ ඇති නිල් පාට සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය, සෘජුකෝණය අඩංගු ඉතිරි පාද දෙක මත ඇඳ ඇති කහ පාට හා කොළ පාට සමචතුරස්‍රවල වර්ගඵලවල එකතුවට සමාන වේ.



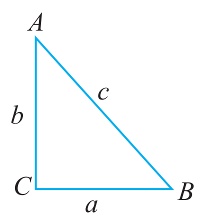
පැත්තක කොටු 5ක් ඇත. පැත්තක කොටු 4ක් ඇත. පැත්තක කොටු 3ක් ඇත.

නිල් පාට සමචතුරස්‍රයේ කොටු 25ක් ඇත.		කොළ පාට සමචතුරස්‍රයේ කොටු 16ක් ඇත.		කහ පාට සමචතුරස්‍රයේ කොටු 9ක් ඇත.
25	=	16	+	9
5×5	=	4×4	+	3×3
5^2	=	4^2	+	3^2

මෙමගින් එළඹිය හැකි නිගමනය වන්නේ, ඕනෑ ම සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක කර්ණයේ දිගෙහි වර්ගය, ඉතිරි පාදවල දිගෙහි වර්ගවල එකතුවට සමාන වේ යන්නයි.

මෙලෙස පයිතගරස් ප්‍රමේයය මගින් පයිතගරස් සම්බන්ධය ගොඩනඟා ගත හැකි ය.

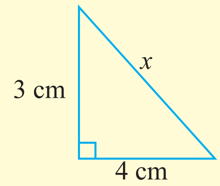
$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$



පහත නිදසුන් මගින් දැක්වෙන්නේ මෙම සම්බන්ධය භාවිතයෙන් ත්‍රිකෝණවල x මගින් දැක්වෙන පාදවල දිග සොයා ඇති ආකාරයයි.

නිදසුන 1

දී ඇති ත්‍රිකෝණයේ x මගින් දැක්වෙන පාදයේ දිග සොයන්න.



$x^2 = (3\text{cm})^2 + (4\text{cm})^2$

$x^2 = 9\text{ cm}^2 + 16\text{ cm}^2$

$x^2 = 25\text{ cm}^2$

$x = \sqrt{(25\text{ cm}^2)}$

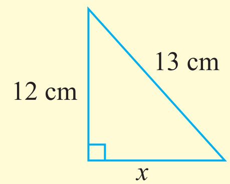
$x = 5\text{ cm}$

මේ අනුව 3, 4, 5 යනු සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක පාද තුනකට සම්බන්ධ කළ හැකි පූර්ණ සංඛ්‍යා තුනක් බව පෙනේ.

නිදසුන 2

දී ඇති ත්‍රිකෝණයේ x මගින් දැක්වෙන පාදයේ දිග සොයන්න.

$x^2 + (12\text{cm})^2 = (13\text{ cm})^2$



$x^2 = (13\text{cm})^2 - (12\text{ cm})^2$

$x^2 = 169\text{ cm}^2 - 144\text{cm}^2$

$x^2 = 25\text{ cm}^2$

$x = \sqrt{(25\text{ cm}^2)}$

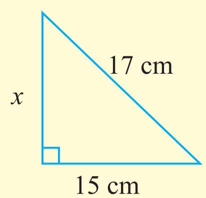
$x = 5\text{ cm}$

මේ අනුව 5, 12, 13 යනු සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක පාද තුනකට සම්බන්ධ කළ හැකි පූර්ණ සංඛ්‍යා තුනක් බව පෙනේ.

නිදසුන 3

x මගින් දැක්වෙන පාදයේ දිග සොයන්න.

$x^2 + (15\text{cm})^2 = (17\text{ cm})^2$



$x^2 = (17\text{cm})^2 - (15\text{cm})^2$

$x^2 = 289\text{ cm}^2 - 225\text{ cm}^2$

$x^2 = 64\text{ cm}^2$

$x = \sqrt{(64\text{ cm}^2)}$

$x = 8\text{ cm}$

මේ අනුව 8, 15, 17 යනු සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක පාද තුනකට සම්බන්ධ කළ හැකි පූර්ණ සංඛ්‍යා තුනක් බව පෙනේ.

ඉහත නිදසුන 1, නිදසුන 2 හා නිදසුන 3 මගින් ලැබුණු,

3, 4, 5

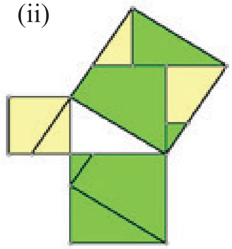
5, 12, 13

8, 15, 17 යනු පයිතගරස් ත්‍රිත්ව වේ. මෙවැනි ත්‍රිත්ව තවත් ඇත්දැයි සොයා බලන්න.

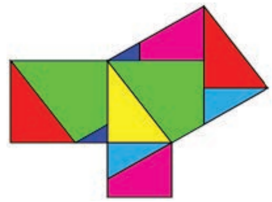
පයිතගරස් ප්‍රමේයය මගින් පෙන්වා දී ඇති සමචතුරස්‍රවල වර්ගඵල ආශ්‍රිත සම්බන්ධය පහත දැක්වෙන රූප සටහන් මගින් තහවුරු කර ගත හැකි ය. මෙහි දැක්වෙන රූප කාඩ්බෝඩ් මත ඇඳ කපා බලන්න.

(i)

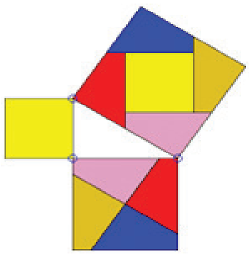
(ii)



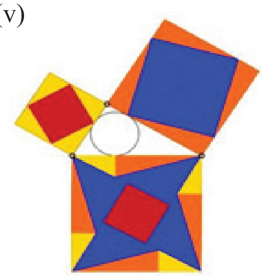
(iii)



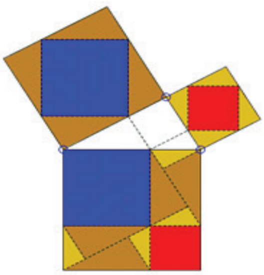
(iv)



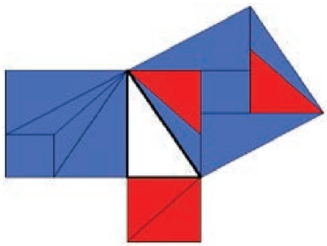
(v)



(vi)



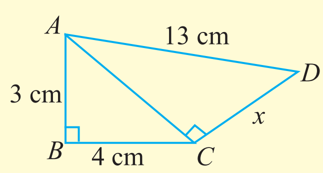
(vii)



පයිතගරස් සම්බන්ධය භාවිතයෙන් තව දුරටත් ගැටලු විසඳමු.

නිදසුන 4

x හි අගය සොයන්න.



ABC ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් සම්බන්ධය යෙදීමෙන්,

$AC^2 = BC^2 + AB^2$

$AC^2 = (4\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2$

$AC^2 = 16\text{ cm}^2 + 9\text{ cm}^2$

$AC^2 = 25\text{ cm}^2$

$AC = \sqrt{(25\text{ cm}^2)}$

$AC = 5\text{cm}$

ACD ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් සම්බන්ධය යෙදීමෙන්,

$AD^2 = AC^2 + CD^2$

$CD^2 = AD^2 - AC^2$

$x^2 \quad = (13\text{ cm})^2 - (5\text{ cm})^2$

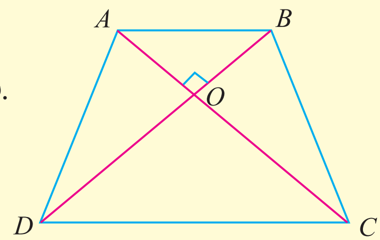
$x^2 \quad = 169\text{ cm}^2 - 25\text{ cm}^2$

$x^2 \quad = 144\text{ cm}^2$

$x \quad = \sqrt{(144\text{ cm}^2)}$

$x \quad = 12\text{ cm}$

නිදසුන 5



$ABCD$ චතුරස්‍රයේ විකර්ණ සෘජුකෝණිව O හි දී ඡේදනය වේ.
$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ බව පෙන්වන්න.

ABO ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් සම්බන්ධය යෙදීමෙන්, $AB^2 = AO^2 + BO^2$ —— (i)

CDO ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් සම්බන්ධය යෙදීමෙන්, $CD^2 = CO^2 + DO^2$ —— (ii)

ADO ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් සම්බන්ධය යෙදීමෙන්, $AD^2 = AO^2 + DO^2$ —— (iii)

BCO ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් සම්බන්ධය යෙදීමෙන්, $BC^2 = CO^2 + BO^2$ —— (iv)

(i) + (ii)

$AB^2 + CD^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2$

(iii) + (iv)

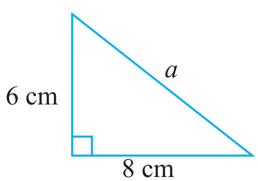
$AD^2 + BC^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2$

$\therefore AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

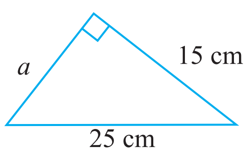
8.2 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණවල a මගින් දැක්වෙන දිග සොයන්න.

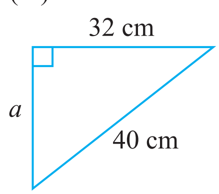
(i)



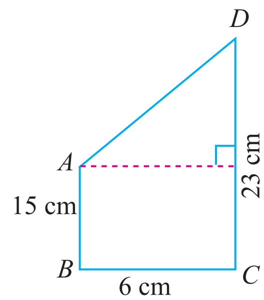
(ii)



(iii)



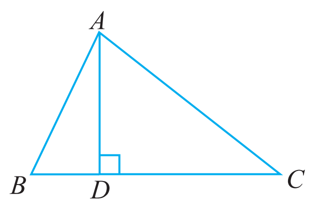
2. රූපයේ දැක්වෙන දත්ත අනුව AD දිග සොයන්න.



3. වෘත්තයක කේන්ද්‍රයේ සිට 12 cm දුරින් පිහිටි ජ්‍යායක දිග 18 cm වේ. වෘත්තයේ අරය සොයන්න.

4. $ABCD$ සමචතුරස්‍රයේ $AC^2 = 2AB^2$ බව පෙන්වන්න.

5. රූපය දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ ඇඳ ඇති උච්චය AD ය. $AB^2 + DC^2 = AC^2 + BD^2$ බව පෙන්වන්න.



සාරාංශය

- සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක කර්ණය මත ඇඳ ඇති සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය, සෘජුකෝණය අඩංගු ඉතිරි පාද දෙක මත ඇඳ ඇති සමචතුරස්‍රවල වර්ගඵලවල එකතුවට සමාන වේ.

9 වෘත්ත චතුරස්‍ර

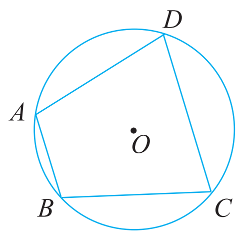
මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,

- වෘත්ත චතුරස්‍ර හඳුනා ගැනීමට,
- වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ යන ප්‍රමේයය සාධනය හඳුනා ගැනීම හා එය භාවිතයෙන් ගණනය කිරීමට,
- වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණය, එහි අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන වේ යන ප්‍රමේයය හඳුනා ගැනීම හා එය ඇසුරෙන් ගණනය කිරීමට,
- ඉහත ප්‍රමේයයන්ගේ විලෝමයන් හඳුනා ගැනීම හා ගණනය කිරීමට

හැකියාව ලැබේ.

9.1 වෘත්ත චතුරස්‍ර

චතුරස්‍රයක ශීර්ෂ 4ම එකම වෘත්තයක පරිධිය මත පිහිටයි නම්, එම චතුරස්‍රය වෘත්ත චතුරස්‍රයක් ලෙස හැඳින්වේ.



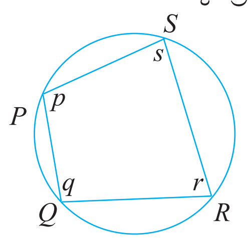
ඉහත A, B, C, D ශීර්ෂ වෘත්තය මත නිසා $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයකි.

ක්‍රියාකාරකම 1

පියවර 1 - කවකටුව භාවිතයෙන් වෘත්තයක් අඳින්න.

පියවර 2 - වෘත්තය මත P, Q, R, S ලක්ෂ්‍ය 4ක් ලකුණු කරන්න.

පියවර 3 - P, Q, R, S පිළිවෙළින් යා කර වෘත්ත චතුරස්‍රය ලබා ගන්න.



පියවර 4 - රූපයේ දක්වා ඇති p, q, r, s කෝණ, කෝණමානය භාවිතයෙන් මැන ලියන්න.

පියවර 5 - $p + r$ හා $q + s$ හි අගය සොයන්න.

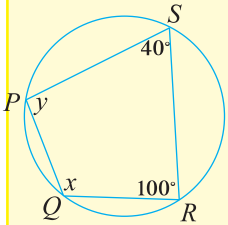
$p + r = 180^\circ$ ද $q + s = 180^\circ$ බව ද ඔබට පැහැදිලි වනු ඇත.

ප්‍රමේයය

වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.

නිදසුන 1

PQRS වෘත්ත චතුරස්‍රයේ x හා y හි අගයන් සොයන්න.



$x + 40^\circ = 180^\circ$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.)

$x = 180^\circ - 40^\circ$

$x = 140^\circ$

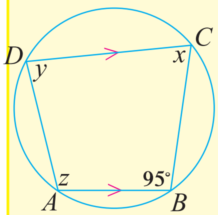
එලෙසම, $y + 100^\circ = 180^\circ$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.)

$y = 180^\circ - 100^\circ$

$y = 80^\circ$

නිදසුන 2

ABCD වෘත්ත චතුරස්‍රයේ *AB//DC* වේ. x, y, z හි අගයන් සොයන්න.



$x + 95^\circ = 180^\circ$ (මිත්‍ර කෝණ එකතුව 180° බැවින්)

$x = 180^\circ - 95^\circ$

$x = 85^\circ$

$y + 95^\circ = 180^\circ$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.)

$y = 180^\circ - 95^\circ$

$y = 85^\circ$

එලෙසම, $85^\circ + z = 180^\circ$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.)

$z = 180^\circ - 85^\circ$

$z = 95^\circ$

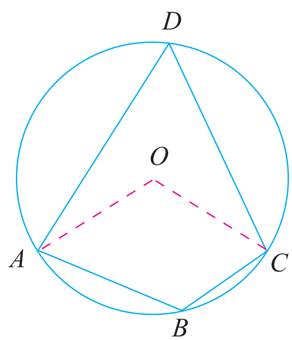
ඉහත භාවිත කරන ලද ''වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ'' යන ප්‍රමේයය විධිමත්ව සාධනය කරන අයුරු විමසා බලමු.

දත්තය : O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් මත *ABCD* වෘත්ත චතුරස්‍රයකි.

සාධනය කළ යුත්ත : (i) $A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^\circ$ බව

(ii) $B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180^\circ$ බව

නිර්මාණය : O හා A ත් O හා C ත් යා කරන්න.



සාධනය : $A\hat{O}C$ මහා කෝණය $= 2\,A\hat{D}C$ (කේන්ද්‍රය මත ආපාතිත කෝණය වෘත්තය මත ආපාතිත කෝණය මෙන් දෙගුණයකි.)

AOC පරාවර්ත කෝණය $= 2\,A\hat{B}C$ (කේන්ද්‍රය මත ආපාතිත කෝණය වෘත්තය මත ආපාතිත කෝණය මෙන් දෙගුණයකි.)

$\therefore\ A\hat{O}C$ (මහා) $+\ A\hat{O}C$ (පරාවර්ත) $= 2\,A\hat{D}C + 2\,A\hat{B}C$

නමුත් $A\hat{O}C$ (මහා) $+\ A\hat{O}C$ (පරාවර්ත) $= 360^\circ$ (ලක්ෂ්‍යයක් වටා කෝණ)

$$\therefore\quad 2\,A\hat{D}C + 2\,A\hat{B}C = 360^\circ$$

$$2\,(A\hat{D}C + A\hat{B}C) = 360^\circ$$

$$A\hat{D}C + A\hat{B}C = \frac{360^\circ}{2}$$

$$A\hat{D}C + A\hat{B}C = 180^\circ$$

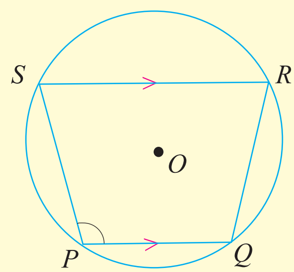
චතුරස්‍රයක අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව 360° බැවින්, $D\hat{A}B + D\hat{C}B = 180^\circ$ වේ.

ඉහත ප්‍රමේයයේ විලෝමය

චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ යුගලයක් පරිපූරක වේ නම් එම චතුරස්‍රයේ ශීර්ෂ සියල්ල එකම වෘත්තයක් මත පිහිටයි.

නිදසුන 3

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක $PQRS$ වෘත්ත චතුරස්‍රයකි. $PQ//SR$ නම්, $S\hat{P}Q = P\hat{Q}R$ බව සාධනය කරන්න.



දත්තය : O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් මත $PQRS$ වෘත්ත චතුරස්‍රයකි.

සාධනය කළ යුත්ත : (i) $PQ//SR$ නම්, $S\hat{P}Q = P\hat{Q}R$ බව

සාධනය : $PQRS$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් නිසා,

$S\hat{P}Q + S\hat{R}Q = 180^\circ$ (සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක නිසා)

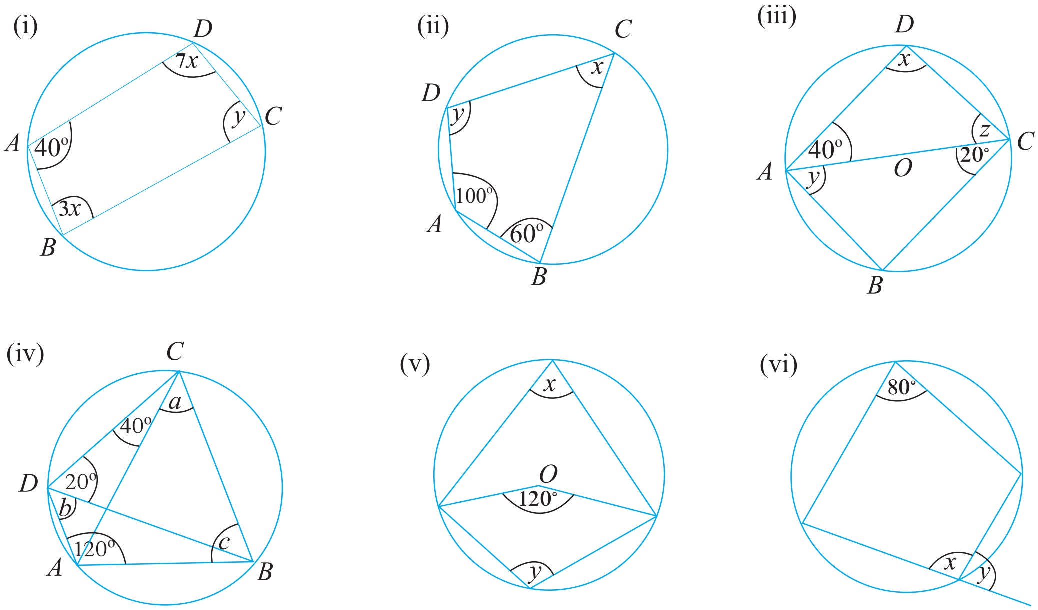
$PQ//SR$ නිසා, $P\hat{Q}R + S\hat{R}Q = 180^\circ$ (මිත්‍ර කෝණ එකතුව 180° නිසා)

$\therefore\ S\hat{P}Q + S\hat{R}Q = P\hat{Q}R + S\hat{R}Q$

$\therefore\ S\hat{P}Q = P\hat{Q}R$ (දෙපසින් ම $S\hat{R}Q$ ඉවත් කිරීමෙන්)

9.1 අභ්‍යාසය

1. දී ඇති තොරතුරු අනුව සංකේතවලින් දැක්වෙන එක් එක් කෝණයෙහි අගය සොයන්න. O ලෙස දැක්වෙන්නේ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයයි.

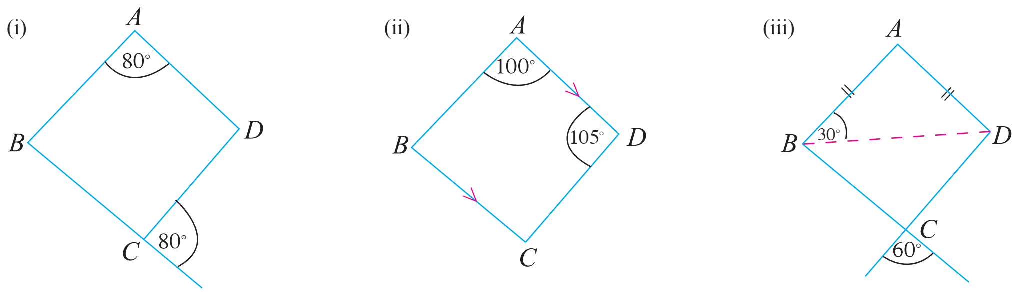


2. $PQRS$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක $\hat{P} = 75^\circ$, $\hat{Q} = 80^\circ$ ද වේ. $\hat{R}$ හා $\hat{S}$ හි අගයන් සොයන්න.

3. $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ BC හා CD පාද සමාන වේ. AC හා BD රේඛා X හි දී ඡේදනය වේ. $B\hat{C}D = 80^\circ$ සහ $A\hat{B}D = 40^\circ$ නම් $B\hat{A}C$ හා $A\hat{D}B$ හි අගයන් සොයන්න.

4. $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක $\hat{A} : \hat{C} = 1 : 2$ හා $\hat{B} = 100^\circ$ නම්, $\hat{A}$, $\hat{C}$ හා $\hat{D}$ හි අගයන් සොයන්න.

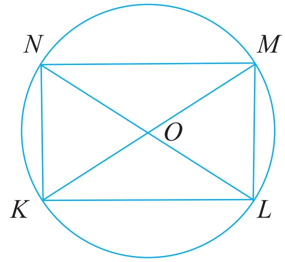
5. පහත එක් එක් රූපයේ දක්වා ඇති $ABCD$ චතුරස්‍රය, වෘත්ත චතුරස්‍රයක් වේ ද නොවේ ද යන්න හේතු සහිත ව දක්වන්න.



6. $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක $AB//DC$ වේ. $A\hat{D}C = B\hat{C}D$ බව සාධනය කරන්න.

7. $PQRS$ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ PR හා QS රේඛා O හි දී ඡේදනය වේ. $Q\hat{R}S$ හි කෝණ සමච්ඡේදකය PR නම්, PQS සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව සාධනය කරන්න.

8. $KLMN$ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ LN හා KM සරල රේඛා O හි දී ඡේදනය වේ. LN මගින් $K\hat{L}M$ හා $K\hat{N}M$ කෝණ සමච්ඡේදනය වේ. KNL ඍජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් බව සාධනය කරන්න.



9. $PQRS$ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ PS ට සමාන්තර ලෙස Q හරහා ඇඳි සරල රේඛාව T හි දී SR හමු වේ.
(i) $P\hat{Q}T = Q\hat{R}S$ බව
(ii) $P\hat{Q}R = Q\hat{T}S$ බව සාධනය කරන්න.

10. $ABCD$ චතුරස්‍රයේ $\hat{A} = \hat{B}$ හා $\hat{C} = \hat{D}$ වේ. $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

9.2 වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණ සහ අභ්‍යන්තර කෝණ අතර සම්බන්ධය

ක්‍රියාකාරකම 2

පියවර 1 - ඔබ කැමති ඕනෑ ම වෘත්තයක් කවකටුව ආධාරයෙන් අඳින්න.
පියවර 2 - වෘත්තය මත A,B,C,D ලක්ෂ්‍ය 4ක් ලකුණු කරන්න.
පියවර 3 - $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රය සම්පූර්ණ කරන්න.
පියවර 4 - AB සරල රේඛාව E දක්වා දික් කරන්න.
පියවර 5 - $A\hat{D}C$ හා $C\hat{B}E$ හි විශාලත්වයන් කෝණමානය භාවිතයෙන් මැන ලියා ගන්න.
පියවර 6 - DA පාදය F දක්වා දික් කරන්න.
පියවර 7 - $B\hat{A}F$ හා $D\hat{C}B$ හි විශාලත්වයන් කෝණමානය භාවිතයෙන් මැන ලියා ගන්න.

$A\hat{D}C = C\hat{B}E$ බව ඔබට පැහැදිලි වනු ඇත.

$B\hat{A}F = D\hat{C}B$ බව ඔබට පැහැදිලි වනු ඇත.

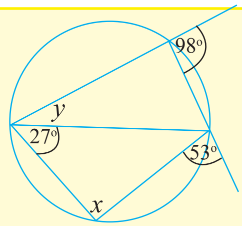
ඉහත ක්‍රියාකාරකම වෙනස් අරයන් ඇති වෘත්ත අඳිමින් සිදු කරන්න. ඔබට ලබා ගත හැකි නිගමනය කුමක් ද?

ප්‍රමේයය

වෘත්ත චතුරස්‍රයක පාදයක් දික් කිරීමෙන් සෑදෙන බාහිර කෝණය එහි අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන වේ.

නිදසුන 1

දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන x හා y හි අගයන් සොයන්න.



$x = 98^\circ$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන නිසා)

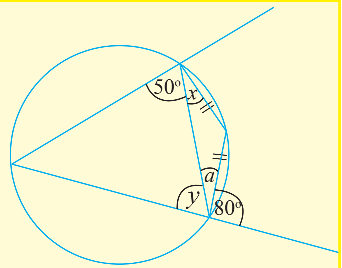
$y + 27^\circ = 53^\circ$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන නිසා)

$y = 53^\circ - 27^\circ$

$y = 26^\circ$

නිදසුන 2

දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන a, x හා y හි අගයන් සොයන්න.



$50^\circ + x = 80^\circ$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර කෝණයට සමාන නිසා)

$x = 80^\circ - 50^\circ$

$x = 30^\circ$

$a = 30^\circ$ (ත්‍රිකෝණයක සමාන පාද දෙකකට සම්මුඛ කෝණ සමාන බැවින්)

$y + 30^\circ + 80^\circ = 180^\circ$ (සරල රේඛාවක් මත පිහිටි බද්ධ කෝණ)

$y + 110^\circ = 180^\circ$

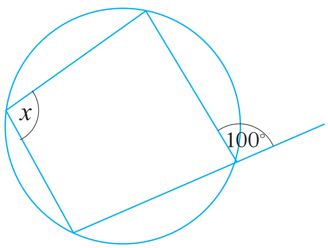
$y = 180^\circ - 110^\circ$

$\therefore \quad y = 70^\circ$

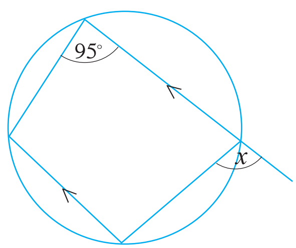
9.2 අභ්‍යාසය

1. පහත රූපවල වීජීය සංකේත මගින් දැක්වෙන එක් එක් කෝණයේ අගය සොයන්න. O ලෙස නම් කර ඇත්තේ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයයි.

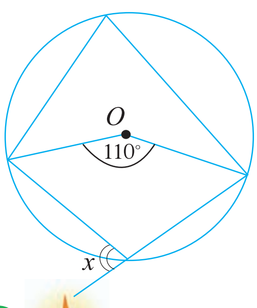
(i)



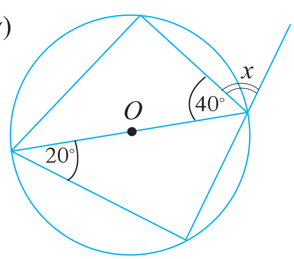
(ii)



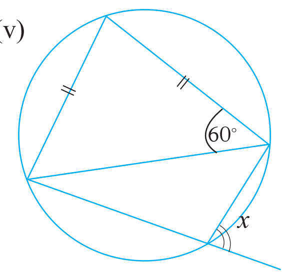
(iii)



(iv)

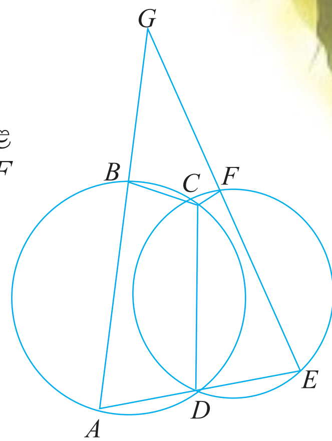


(v)

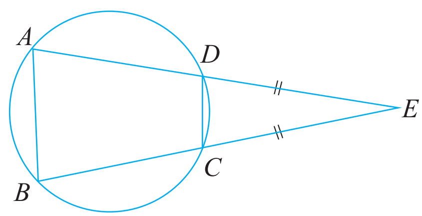


2. රූපයේ පරිදි $ABCD$ හා $CDEF$ වෘත්ත චතුරස්‍ර 2කි. දික් කළ AD රේඛාව වෘත්තය E හි දී හමු වේ. දික් කළ AB හා EF රේඛා G හි දී හමු වේ.

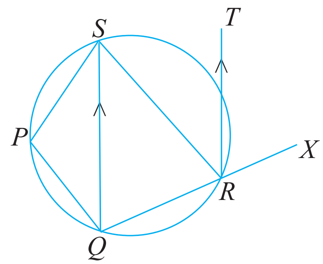
(i) $C\hat{F}E = C\hat{B}G$ බව
(ii) $BCFG$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව
සාධනය කරන්න.



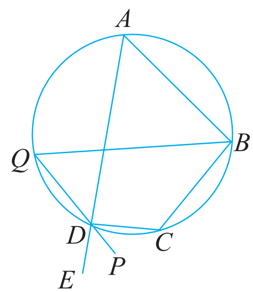
3. $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක AD හා BC පාද දික් කළ විට E හි දී හමු වේ. $ED = EC$ නම් ABE සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව සාධනය කරන්න.



4. $PQRS$ වෘත්ත චතුරස්‍රයකි. QR පාදය X දක්වා දික් කර ඇත. QSට සමාන්තර ලෙස RT ඇඳ ඇත. $R\hat{Q}S + Q\hat{S}R = S\hat{P}Q$ බව සාධනය කරන්න.



5. රූපයේ $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයකි. AD පාදය E තෙක් දික් කර ඇත. $BCDQ$ වෘත්ත චතුරස්‍රය පිහිටා ඇත්තේ, QD රේඛාව P තෙක් දික් වන පරිදි ය. DP මගින් EDC කෝණය සමච්ඡේදනය වන්නේ නම්, BQ මගින් $A\hat{B}C$ සමච්ඡේද වන බව පෙන්වන්න.



සාරාංශය

- එකම වෘත්තයක පරිධිය මත චතුරස්‍රයක ශීර්ෂ 4ම පිහිටයි නම්, එය වෘත්ත චතුරස්‍රයක් ලෙස හැඳින්වේ. වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.
- චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ යුගලක් පරිපූරක නම් එම චතුරස්‍රයේ ශීර්ෂ වෘත්තයක් මත පිහිටයි.
- වෘත්ත චතුරස්‍රයක පාදයක් දික් කිරීමෙන් සෑදෙන බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන වේ.

10 කොටස් වෙළෙඳපොළ

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,

- හවුල් ව්‍යාපාරයක් යනු කුමක්දැයි දැන ගැනීමට,
- කොටස් වෙළෙඳපොළ හා එහි කාර්යය හඳුනා ගැනීමට,
- කොටස් මිල දී ගැනීමෙන් ව්‍යාපාරවලට හවුල් විය හැකි බව දැන ගැනීමට,
- හවුල් ව්‍යාපාරවලින් ලැබෙන ලාභාංශ ගණනය කිරීමට,
- කොටස් පිළිබඳ මිශ්‍ර ගැටලු විසඳීමට

හැකියාව ලැබේ.

10.1 හැඳින්වීම

ඕනෑ ම රටක ආර්ථිකය කළමනාකරණය කිරීමේ දී මූලිකව සලකා බලන සාධකයක් වන්නේ එරට පවත්වා ගෙන යන ව්‍යාපාර හෝ සමාගම් ය. එසේ ම අලුතෙන් ආරම්භ කරන ව්‍යාපාර හෝ ආරම්භ කිරීමට යෝජිත සමාගම්වලට ද වැදගත් තැනක් හිමි වේ. කිසියම් ව්‍යාපාරයක හිමිකාරීත්වය පුද්ගලික අංශයට හෝ රාජ්‍ය අංශයට හිමිවිය හැකි ය. රාජ්‍ය අංශයේ සමාගම් බොහොමයක් පොදු සමාගම් වේ.

ඕනෑ ම ව්‍යාපාරයක් ආරම්භ කිරීම හෝ පවත්වා ගෙන යාම සඳහා මුදලක් ආයෝජනය කිරීමට සිදුවේ. මෙසේ ආයෝජනය කරන මුදල "ප්‍රාග්ධනය"ලෙස හැඳින්වේ.

ව්‍යාපාරයක් සඳහා අවශ්‍ය ප්‍රාග්ධනය විශාල අගයක් වන විට එය සමාන කොටස්වලට බෙදා එම කොටස් මහජනතාව අතර විකුණනු ලැබේ. මෙසේ විකුණන කොටස් මිල දී ගැනීම මගින් මහජනතාවට එම ව්‍යාපාරවල හවුල්කරුවන් බවට පත්විය හැකි ය. මේ ආකාරයට පුද්ගලයින් දෙදෙනෙකු හෝ කිහිප දෙනෙකු හවුල් කර ගනිමින් ආරම්භ කෙරෙන ව්‍යාපාර හවුල් ව්‍යාපාර ලෙස හැඳින්වේ.

10.2 කොටස් වෙළෙඳපොළ

කිසියම් ව්‍යාපාරයක හෝ සමාගමක කොටස් විකිණීම සඳහාත් ගැණුම්කරුවන්ට කොටස් මිල දී ගැනීම සඳහාත් පහසුකම් සලසා ඇති ස්ථානය කොටස් වෙළෙඳපොළ ලෙස හැඳින්වේ. "කොළඹ ව්‍යාපාර වස්තු හුවමාරුව" ලෙස ද කොටස් වෙළෙඳපොළ හඳුන්වයි. ශ්‍රී ලංකා සුරැකුම්පත් හා විනිමය කොමිෂන් සභාව මගින් කොටස් වෙළඳපොළේ කටයුතු අධීක්ෂණය කිරීම හා නියාමනය කිරීම කරනු ලබයි.

යම් සමාගමක හෝ ව්‍යාපාරයක කොටස්, කොටස් වෙළෙඳපොළ හරහා විකිණීම හෝ මිල දී ගැනීමට නම් එහි ලියාපදිංචි සමාගම් ලේඛනයට ඇතුළත් විය යුතු ය.

මෙසේ ලියාපදිංචි සමාගම්වල කොටස් පළමු වරට ගැණුම්කරුවන් අතර විකිණීම "ප්‍රාථමික වෙළෙඳපොළ" ලෙස හැඳින්වේ. ගැණුම්කරුවන් විසින් මිල දී ගෙන ඇති කොටස් නැවත වෙනත් ගැණුම්කරුවන්ට විකිණීම සඳහා ද අවස්ථාව කොටස් වෙළඳපොළේ පහසුකම් ඇත. එය "ද්විතියික වෙළෙඳපොළ" වේ.

මෙහි දී ගැණුම්කරුවන්ගේ පහසුව සඳහා තැරැව්කරුවන් හෝ තැරැව්කාර සමාගම්වල සහය ලබා ගත හැකි ය. කොටස් වෙළඳපොළේ ලියාපදිංචි තැරැව්කාර සමාගම් පිහිටා තිබේ.

10.3 වෙළෙඳපොළ අගය

ව්‍යාපාරයක් ආරම්භ කිරීමට අවශ්‍ය ප්‍රාග්ධනය උපයා ගැනීම සඳහා එය කොටස්වලට බෙදා මහජනතාව අතර විකුණන බව දැන් අපි දනිමු. සමාගමක කොටස් හඳුන්වා දීමේ මිල හෝ කොටස් මිලදී ගන්නා විට හෝ එය ''කොටසක ගැණුම් මිල'' ලෙසත් එම කොටස් විකුණනු ලබන මිල ''කොටසක විකුණුම් මිල'' ලෙසත් හැඳින්වේ.

කිසියම් පුද්ගලයෙකු යම් සමාගමකින් මිල දී ගන්නා කොටස් ගණන තීරණය වන්නේ ඔහු විසින් ආයෝජනය කරන මුදල හා ඉහත සඳහන් කළ වෙළෙඳපොළ මිල මත ය. එනම්,

$$\text{කොටස් ගණන} = \frac{\text{ආයෝජනය කළ මුදල}}{\text{වෙළෙඳපොළ මිල}} \text{ වේ.}$$

පහත නිදසුන මගින් මෙය තව දුරටත් පැහැදිලි කළ හැකි ය.

නිදසුන 1

රණසිංහ සහ සමාගමේ කොටසක වෙළඳපොළ මිල රු. 15 වන අවස්ථාවක කමල් රු. 30 000ක් වැය කර කොටස් මිල දී ගත්තේ නම් කමල් ගත් කොටස් ගණන කොපමණ ද?

කමල් කොටසක් මිල දී ගෙන ඇත්තේ රු. 15 බැගිනි. එබැවින් කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රු. 15කි.මේ නිසා කමල්ට මිල දී ගත හැකි කොටස් ගණන සෙවීම පහත පරිදි කළ හැකි ය.

$$\text{කොටස් ගණන} = \frac{30\ 000}{15} = 2000$$

10.4 ලාභාංශය සෙවීම

කිසියම් ව්‍යාපාරයක මූලික අරමුණ වන්නේ ලාභ ඉපැයීමයි. මෙසේ ව්‍යාපාරයක් වර්ෂය තුළ ලබන ලාභය තම හවුල්කරුවන් අතර එක් එක් පුද්ගලයා සතු කොටස් ගණන මත කොටසකට නිශ්චිත මුදලක් වන පරිදි බෙදා දෙනු ලැබේ. එය ලාභාංශ ගෙවීම ලෙස හඳුන්වයි. වර්ෂයක් අවසානයේ පුද්ගලයෙකුට ලැබෙන මෙම මුළු මුදල ලාභාංශ ආදායම වේ.

නිදසුන 1

සිරිමල් එක්තරා සමාගමක රු. 10 කොටස් මිල දී ගැනීම සඳහා රු. 25 000ක් ආයෝජනය කරයි. එම සමාගම වර්ෂයක් අවසානයේ කොටසක් සඳහා රු.5 ක් ලාභාංශ ලෙස ගෙවනු ලැබේ.

(i) ඔහු මෙම සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල කීය ද?
(ii) කොටසකට ගෙවන ලාභාංශය කීය ද?
(iii) ඔහුට මෙම සමාගමෙන් මිල දී ගත හැකි කොටස් ගණන කීය ද?
(iv) වර්ෂය අවසානයේ ඔහුට ලැබෙන ලාභාංශ ආදායම සොයන්න.

(i) ආයෝජනය කළ මුදල = රු. 25 000

(ii) කොටසකට ගෙවන ලාභාංශය = රු. 5

(iii) කොටස් ගණන $= \frac{25\ 000}{10} = 2500$

(iv) වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම $= 2500 \times 5 =$ රු. 12 500

10.5 ප්‍රාග්ධන ලාභය

ආයෝජකයෙකුට කොටස් විකිණීමේදී ලාභයක් හෝ අලාභයක් සිදු විය හැකි ය. මෙහිදී විකුණුම් මිල, ගැණුම් මිලට වඩා වැඩි නම් ප්‍රාග්ධන ලාභයක් ඇති වේ.

ප්‍රාග්ධන ලාභය = කොටස්වල විකුණුම් මිල − කොටස්වල ගැණුම් මිල

නිදසුන 1

කොටසක වෙළඳපොළ මිල රු. 25ක් වූ සමාගමක කොටස් 1000ක් කැලුම් විසින් මිලදී ගනු ලැබේ. එම කොටසක වෙළඳපොළ මිල රු. 30ක් වූ අවස්ථාවක ඒවා විකිණීමෙන් ඔහු ලබන ප්‍රාග්ධන ලාභය කොපමණ ද?

ආයෝජනය කළ මුදල = රු. 25 × 1000
= රු. 25 000

කොටස් විකිණීමෙන් ලැබෙන මුදල = රු. 30 × 1000
= රු. 30 000

ප්‍රාග්ධන ලාභය = රු. 30 000 − රු.25 000
= රු. 5000

10.1 අභ්‍යාසය

1. පහත වගුව ඔබේ අභ්‍යාස පොතේ පිටපත් කර ගෙන හිස්තැන් පුරවන්න.

කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල (රු.)	ආයෝජනය කළ මුදල (රු.)	මිල දී ගත් කොටස් ගණන
10	28000	....
....	35000	1750
12	....	400
7.50	....	250
15	7500	

2. පහත වගුව ඔබේ අභ්‍යාස පොතේ පිටපත් කරගෙන හිස්තැන් පුරවන්න.

කොටස් ගණන	කොටසකට ගෙවන ලාභාංශය	ලාභාංශ ආදායම (රු.)
250	3	....
....	5	4000
450	....	1800
....	5	3500
550	2	....
324	....	1134

3. නාලක වාර්ෂික ලාභාංශය කොටසකට රු. 7ක් ගෙවන සමාගමක කොටසක වෙළඳපොළ මිල රු. 25 වූ අවස්ථාවක කොටස් මිල දී ගැනීමට රු. 8000ක් ආයෝජනය කරයි.
   (i) ඔහුට මිල දී ගත හැකි කොටස් ගණන කීය ද?
   (ii) ඔහුට ලැබෙන වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම කීය ද?
   (iii) ලැබුණු ආදායම යෙදූ මුදලේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න.

4. වාර්ෂික ලාභාංශය ලෙස කොටසකට රු. 3ක් ගෙවන සමාගමක් කොටසක වෙළඳපොළ මිල රු. 8 බැගින් වූ අවස්ථාවක කොටස් මිල දී ගැනීම සඳහා රු. 40 000ක් ආයෝජනය කළ රවිඳුට වර්ෂය අවසානයේ ලැබෙන ලාභාංශ ආදායම සොයන්න.

5. සුසන්ත එක්තරා සමාගමක රු. 12 කොටස් 250ක් මිල දී ගැනීම සඳහා තමා සතුව තිබූ මුදල් ආයෝජනය කරන ලදී. ඔහු මෙම කොටස් මිල දී ගැනීම සඳහා ආයෝජනය කළ මුදල කීය ද?

6. පියල් තමා ළඟ ඇති මුදලක් ආයෝජනය කර එක්තරා සමාගමක කොටස් රු. 12 බැගින් මිල දී ගනී. සමාගම කොටසක් සඳහා රු. 5ක් ලාභාංශ වශයෙන් ගෙවනු ලැබේ. වර්ෂයක් අවසානයේ පියල්ට රු. 3500ක ලාභාංශ ආදායමක් ලබා ගත හැකි විය.
   (i) මෙම සමාගමේ පියල් සතු කොටස් ගණන සොයන්න.
   (ii) කොටස් මිල දී ගැනීමට පියල් යෙදූ මුදල සොයන්න.

7. සමන් එක්තරා සමාගමක වෙළඳපොළ මිල රු. 20 වූ අවස්ථාවක කොටස් මිල දී ගැනීම සඳහා රු. 25 000ක් ආයෝජනය කළේ ය. එයින් වර්ෂය අවසානයේ ලද ලාභාංශ ආදායම යෙදූ මුදලින් 25 %ක් විය.
   (i) සමන් ලැබූ ලාභාංශ ආදායම කීය ද?
   (ii) සමන් මිල දී ගත් කොටස් ගණන කීය ද?
   (iii) සමාගම විසින් කොටසක් සඳහා ගෙවූ ලාභාංශය කීය ද?

8. කීර්ති කිසියම් සමාගමක කොටස් රු. 12 බැගින් මිලට ගැනීමට රු. 27 000ක් ආයෝජනය කරයි. සමාගම වාර්ෂික ලාභාංශ ලෙස කොටසකට රු. 5 ක් ගෙවනු ලැබේ. අවුරුද්දකට පසු එම කොටස් රු. 18 බැගින් විකුණා ලැබෙන මුදලත් ඉහත සමාගමෙන් ඔහුට ලැබෙන ලාභාංශයත් යොදා වෙනත් සමාගමක කොටස් රු. 15 බැගින් මිල දී ගනී. දෙවන සමාගම කොටසකට රු. 6 ක් ලාභාංශ ලෙස ගෙවනු ලැබේ.
   (i) පළමු සමාගමේ ඔහු සතු කොටස් ගණන කීය ද?
   (ii) පළමු සමාගමෙන් ඔහුට ලැබෙන ලාභාංශ ආදායම කීය ද?
   (iii) පළමු සමාගමේ කොටස් විකිණීම නිසා ලැබුණු මුදල කීය ද?
   (iv) දෙවන සමාගමේ ආයෝජිත මුදල කීය ද?
   (v) දෙවන සමාගමෙන් ඔහුට මිල දී ගත හැකි කොටස් ගණන කීය ද?
   (vi) දෙවන සමාගමෙන් ලබන ලාභාංශ ආදායම කීය ද?
   (vii) දෙවන සමාගමේ කොටස් මිල දී ගැනීම නිසා ඔහුගේ ආදායම කොපමණ ප්‍රමාණයකින් වැඩි වූයේ ද?

9. එක්තරා ආයෝජකයෙක් රු. 4ක් ගෙවන වලිසිංහ සහ සමාගමේ තමා සතුව තිබූ කොටස් රු. 4000ක වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායමක් ලබා ගැනීමෙන් පසු විකුණයි. ඉන්පසු ඔහු එම මුදල ඉහත ලද ආදායමත් සමඟ කොටසකට රු. 6ක් ගෙවන දුනුසිංහ සහ සමාගමේ රු. 10 කොටස් මිල දී ගැනීමට යොදවයි. මෙම හේතුවෙන් ඔහුගේ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම රු. 1436 කින් ඉහළ යන ලදී.

(i) වලිසිංහ සහ සමාගමේ ඔහු සතුව තිබූ කොටස් ගණන කීය ද?
(ii) දුනුසිංහ සහ සමාගමෙන් ඔහුට ලැබුණු ලාභාංශය කීය ද?
(iii) දුනුසිංහ සහ සමාගමෙන් ඔහුට මිල දී ගත හැකි කොටස් ගණන කීය ද?
(iv) දුනුසිංහ සහ සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල කීය ද?

10. කසුන් තමා සතු මුදලකින් හරි අඩක් කොටසකට ලාභාංශය රු.5ක් ගෙවන සැම්සන් සහ සමාගමේ කොටසක් රු. 12 බැගින් මිල දී ගැනීමට ද ඉතිරි මුදල කොටසකට රු. 6ක් ගෙවන යුනයිටඩ් සහ සමාගමේ කොටසක් රු. 13 බැගින් මිල දී ගැනීමට ද යොදවන ලදි. වර්ෂයක් අවසානයේ සමාගම් දෙකෙන් ම ඔහුට ලැබුණු ලාභාංශ ආදායම රු. 9590කි. එක් එක් සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල සොයන්න.

11. වාර්ෂික ලාභාංශ ලෙස කොටසකට රු.3ක් ගෙවන A නම් සමාගමක කොටසක් රු. 8 බැගින් මිල දී ගැනීමට සුපුන් රු. 12 000ක් ආයෝජනය කරයි. වසරක ආදායම ලැබීමෙන් පසු ඔහු එම ආදායම සහ තම කොටස් රු. 12 බැගින් විකුණා ලැබෙන මුදල් යොදා කොටසකට ලාභාංශය රු. 4ක් ගෙවන B නම් සමාගමක කොටස් මිල දී ගනී. මේ නිසා ඔහුගේ වාර්ෂික ආදායම රු. 500 කින් වැඩි විය.
(i) A සමාගමෙන් මිල දී ගත් කොටස් ගණන කීය ද?
(ii) A සමාගමෙන් ලද ලාභාංශ ආදායම සොයන්න.
(iii) B සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල කීය ද?
(iv) B සමාගමෙන් ලද ලාභාංශ ආදායම සොයන්න.
(v) B සමාගමේ ඔහු සතු කොටස් ගණන කීය ද?
(vi) B සමාගමේ කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල කීය ද?

12. නිමල් එක්තරා සමාගමක කොටසක් රු. 20 බැගින් මිල දී ගැනීමට රු. 30 000ක් ආයෝජනය කළේ ය. එම සමාගමේ කොටසක වෙළඳපොළ අගය රු. 25ක් තෙක් ඉහළ ගිය දිනයකදී ඔහු තමා සතු කොටස් සියල්ල විකුණන ලදි.
(i) ඔහු මිල දී ගත් කොටස් ගණන කොපමණ ද?
(ii) කොටස් විකිණීමෙන් ඔහු ලත් මුදල සොයන්න.
(iii) ඔහු ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභය සොයන්න.
(iv) ඔහු ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභය, ආයෝජනය කළ මුදලේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න.

13. කොටස් වෙළඳපොළ සමඟ සම්බන්ධ වී ඇති පියල් එක්තරා සමාගමක කොටසක වෙළඳපොළ අගය රු. 30ක් වූ කොටස් 4000ක් මිල දී ගන්නා ලදි. එක්තරා දිනයකදී එම සමාගමේ කොටසක වෙළඳපොළ අගය රු. 40ක් බව දැක ඔහු තමා සතු කොටස් සියල්ල විකුණන ලදි.
(i) ඔහු එම සමාගමේ ආයෝජනය කල මුදල කොපමණ ද?
(ii) කොටස් විකිණීමෙන් ඔහු ලත් මුදල කොපමණ ද?
(iii) මෙමගින් පියල් ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභය කොපමණ ද?
(iv) ඔහු ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභය, ආයෝජනය කළ මුදලේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න.

14. කොටසක වෙළඳපොළ අගය රු. 40ක් වූ සමාගමක කොටස් මිල දී ගත් කමල් ආදායම් ලැබීමෙන් පසුව එම සමාගමේ කොටසක වෙළඳපොළ අගය රු. 48ක් වූ අවස්ථාවක තමා සතු කොටස් සියල්ල විකුණා දමන ලදි. මෙමගින් ඔහුට ලැබෙන ප්‍රාග්ධන ලාභය, ආයෝජනය කළ මුදලේ කුමන ප්‍රතිශතයක්ද යන්න ගණනය කරන්න.

11 වර්ගජ සමීකරණ

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- වර්ගජ සමීකරණයක විසඳුම්, වර්ගජ සමීකරණයට අදාළ ත්‍රි පද වර්ගජ ප්‍රකාශනයේ සාධක භාවිතයෙන් සෙවීමට,
- දෙන ලද මූල ඇසුරෙන් අදාළ වර්ගජ සමීකරණය ගොඩනැඟීමට,
- වර්ග පූර්ණය භාවිතයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීමට,
- සූත්‍රය භාවිතයෙන් වර්ගජ සමීකරණවල විසඳුම් ලබා ගැනීමට

හැකියාව ලැබේ.

11.1 සාධක භාවිතයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම

වර්ගජ සමීකරණයකට අදාළ වර්ගජ ප්‍රකාශනය සාධකවලට වෙන් කිරීමෙන් වර්ගජ සමීකරණයක විසඳුම් සොයන ආකාරය මීට ඉහත දී ඔබ උගෙන ඇත.

එහි දී "සාධක කිහිපයක ගුණිතය ශූන්‍යයට සමාන වේ නම් එහි එක් සාධකයක් හෝ ශූන්‍යයට සමාන වේ." යන ගණිතමය සංකල්පය ද අප භාවිත කළෙමු. එම උගත් කරුණු නැවත සිහිපත් කිරීම සඳහා පහත නිදසුන් කිහිපය වෙත අවධානය යොමු කරමු.

නිදසුන 1

$a\,(a-2)=0$ විසඳන්න.

මෙම සමීකරණයේ ඇත්තේ සාධක දෙකක ගුණිතයක් ශූන්‍යයට සමාන ව ඇති අවස්ථාවකි. මෙහි දී සාධක දෙක වෙන වෙන ම ශූන්‍යයට සමාන කළ යුතු වේ.

$a\,(a-2)=0$

$a=0$ හෝ $(a-2)=0$ විය යුතු ය.

$a=0$ හෝ $a=2$ වේ.

$\therefore$ විසඳුම් $a=0$ හා $a=2$ වේ.

නිදසුන 2

$16=(P-3)^2$ විසඳන්න.

I ක්‍රමය

$(P-3)^2=16$

සියලුම පද සමාන ලකුණෙන් එක් පැත්තකට ගෙන ලැබෙන ප්‍රකාශනය ශූන්‍යයට සමාන කිරීමෙන්,

$(P-3)^2-16=0$

වරහන් ඉවත් කිරීමෙන්,

$P^2-6P+9-16=0$

$P^2-6P-7=0$

$P^2-7P+P-7=0$

$P\,(P-7)+1\,(P-7)=0$

$(P-7)\,(P+1)=0$ (සාධක සෙවීමෙන්)

$P - 7 = 0$ හෝ $P + 1 = 0$

$P = 7$ හෝ $P = -1$

$\therefore$ විසඳුම් $P = 7$ හා $P = -1$ වේ.

මෙම වර්ගජ සමීකරණයේ 16 සංඛ්‍යාව 4හි වර්ගයක් ලෙස ලිවීමට හැකි නිසා මෙය පහත දැක්වෙන ආකාර දෙකට ද විසඳීමට හැකි වේ.

II ක්‍රමය

$(P - 3)^2 = 16$

වර්ග දෙකක අන්තරයේ සාධක ලෙස ලිවීමෙන්, $(P - 3)^2 = 4^2$

$(P - 3)^2 - 4^2 = 0$

$\{(P - 3) - 4\}\{(P - 3) + 4\} = 0$

$\{(P - 3 - 4\}\{(P - 3 + 4\} = 0$

$(P - 7)(P + 1) = 0$

$P - 7 = 0$ හෝ $P + 1 = 0$

$P = 7$ හෝ $P = -1$

III ක්‍රමය

සාධක භාවිතයෙන් තොරව,

$(P - 3)^2 = 16$

$(P - 3) = \pm\sqrt{16}$ (දෙපසෙහි ම වර්ගමූලය ගැනීමෙන්)

$P - 3 = \pm 4$

$P - 3 = 4$ හෝ $P - 3 = -4$

$P = 4 + 3$ හෝ $P = -4 + 3$

$P = 7$ හෝ $P = -1$

නමුත් සාධක භාවිතයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීමේ වඩාත් සාධාරණ ක්‍රමය වන්නේ සමීකරණයේ දකුණු අත පැත්ත ශුන්‍ය වන පරිදි සකස් කිරීම බව මතක තබා ගත යුතු ය. පහත නිදසුන වෙත අවධානය යොමු කරන්න.

නිදසුන 3

$4(a - 1)(a + 1) = 15a$ හි විසඳුම් සොයන්න.

$4(a - 1)(a + 1) = 15a$

$4(a - 1)(a + 1) - 15a = 0$

$4(a^2 - 1) - 15a = 0$

$4a^2 - 4 - 15a = 0$

$4a^2 - 15a - 4 = 0$

$4a^2 - 16a + a - 4 = 0$

$4a(a - 4) + 1(a - 4) = 0$

$(a - 4)(4a + 1) = 0$

$a - 4 = 0$ හෝ $4a + 1 = 0$

$a = 4$ හෝ $a = -\frac{1}{4}$

$\therefore$ විසඳුම් $a = 4$ හා $a = -\frac{1}{4}$ වේ.

නිදසුන 4

$x\ (x + 3) = x + 8$ විසඳන්න.

$$x\ (x + 3) = x + 8$$
$$x^2 + 3x = x + 8$$
$$x^2 + 3x - x - 8 = 0 \quad \text{(ශූන්‍යයට සමාන කිරීම මගින්)}$$
$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$x^2 + 4x - 2x - 8 = 0$$
$$x\ (x + 4) - 2\ (x + 4) = 0$$
$$(x + 4)\ (x - 2) = 0$$
$x + 4 = 0$ හෝ $x - 2 = 0$

$x = -4$ හෝ $x = 2$ $\quad\therefore$ විසඳුම් $x = -4$ හා $x = 2$ වේ.

නිදසුන 5

අනුයාත ධන ඉරට්ට සංඛ්‍යා දෙකක ගුණිතය 120කි. එම සංඛ්‍යා දෙක සොයන්න.

කුඩා ඉරට්ට සංඛ්‍යාව m නම් අනුයාත විශාල ඉරට්ට සංඛ්‍යාව $(m + 2)$ වේ. එවිට,

$m(m + 2) = 120$ වේ.

$$m^2 + 2m = 120$$
$$m^2 + 2m - 120 = 0$$
$$m^2 + 12m - 10m - 120 = 0$$
$$m\ (m + 12) - 10\ (m + 12) = 0$$
$$(m + 12)\ (m - 10) = 0$$
$m + 12 = 0$ හෝ $m - 10 = 0$

$m = -12$ හෝ $m = 10$

ධන ඉරට්ට සංඛ්‍යාවක් නිසා $m = 10$ වේ.

$m + 2 = 12$ වේ. $\therefore$ කුඩා ඉරට්ට සංඛ්‍යාව 10 වන අතර විශාල ඉරට්ට සංඛ්‍යාව 12 වේ.

11.1 අභ්‍යාසය

1. සාධක භාවිතයෙන් පහත සඳහන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳන්න.

(i) $x\ (x + 4) = 0$ (ii) $4p\ (p - 2) = 0$ (iii) $2m - m^2 = 0$

(iv) $\frac{2}{3}x\ (4 - x) = 0$ (v) $x^2 + 6x + 5 = 0$ (vi) $m^2 - 7m + 12 = 0$

(vii) $15 - 2k - k^2 = 0$ (viii) $r^2 - 9 = 0$ (ix) $2a^2 - 12 = 2a$

(x) $2n^2 + 5n + 2 = 0$ (xi) $3q^2 - 10q + 3 = 0$ (xii) $(a + 2)\ (2a + 5) = 15$

2. අනුගාමී ඔත්තේ සංඛ්‍යා දෙකක ගුණිතය 195කි. සංඛ්‍යා දෙක සොයන්න.

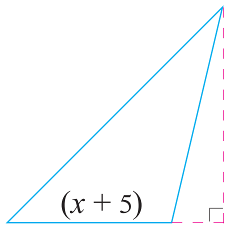
3. සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක සෘජුකෝණය අඩංගු පාද දෙකෙන් එකක් අනෙකට වඩා 5 cm න් වැඩි ය. ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය 250 cm^2 නම් සෘජුකෝණය අඩංගු පාද දෙකේ දිග වෙන වෙන ම සොයන්න.

4. යතුරුපැදියක් 240 km දුරක් නියත වේගයකින් ගමන් කරයි. එහි වේගය පැයට කිලෝමීටර 10ක් අඩු කළේ නම්, ගමනට ගත වන කාලය පැය 12කින් වැඩි වේ. යතුරුපැදියේ නියත වේගය සොයන්න.

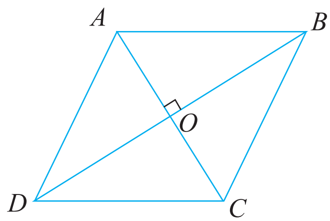
5. සෘජුකෝණාස්‍රයක පළල $(x + 1)$ වේ. එහි දිග පළලේ දෙගුණයට වඩා ඒකක 1ක් අඩු ය. මෙම සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 6ක් නම් x හි අගය සොයා සෘජුකෝණාස්‍රයේ දිග හා පළල වෙන වෙන ම සොයන්න.

6. විහාරස්ථානයක සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ධර්ම ශාලාවේ දිග, පළල මෙන් දෙගුණයකට වඩා 7 mක් වැඩි ය. මෙහි 50 cmක දිග 50 cmක පළල පිඟන් ගඩොල් (ටයිල්) ඇතිරීමට පිඟන් ගඩොල් 240ක් අවශ්‍ය වේ. ධර්ම ශාලාවේ දිග හා පළල සොයන්න. (පිඟන් ගඩොල් භාග ලෙස අතුරන්නේ නැති බව සලකන්න.)

7. මෙම ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය 24 cm^2 වේ නම් මෙම ත්‍රිකෝණයේ ආධාරකයේ හා උච්චයේ දිග වෙන වෙන ම සොයන්න.



8. $ABCD$ රොම්බසයේ විකර්ණ O හි දී ලම්බව සමච්ඡේදනය වේ. AO දිග සෙන්ටිමීටර $(x - 2)$ ද OB දිග සෙන්ටිමීටර x ද වේ. $ABCD$ රොම්බසයේ වර්ගඵලය 16 cm^2 වේ නම් විකර්ණ දෙකෙහි දිග වෙන වෙන ම සොයන්න.



11.2 දෙන ලද මූල ඇසුරෙන් අදාළ වර්ගජ සමීකරණය ගොඩනැගීම

දෙන ලද වර්ගජ සමීකරණයක් සාධකවලට වෙන් කර විසඳන ආකාරය (මූල සොයන ආකාරය) ඔබ මේ වන විට ඉගෙන ගෙන ඇත. එබැවින් සමීකරණයේ විසඳුම් දෙක දී ඇති විට ඊට අදාළ වර්ගජ සමීකරණය ගොඩනගා ගන්නා ආකාරය විමසා බලමු.

නිදසුන 1

x හි අගයන් (මූල) 2 හා 3 වශයෙන් ඇති x හි වර්ගජ සමීකරණය ගොඩනගන්න.

$x = 2$ හෝ $x = 3$

$x - 2 = 0$ හෝ $x - 3 = 0$

$\therefore \ (x - 2)(x - 3) = 0$ විය යුතු ය.

ද්විපද ප්‍රකාශන දෙක ගුණ කිරීමෙන්, $x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

$$x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

නිදසුන 2

$a = -5$ හා $a = 2$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය ගොඩනගන්න.

$$a = -5 \text{ හෝ } a = 2$$
$$a + 5 = 0 \text{ හෝ } a - 2 = 0$$
$$(a + 5)(a - 2) = 0$$

ද්විපද ප්‍රකාශන දෙක ගුණ කිරීමෙන්,

$$(a + 5)(a - 2) = 0$$
$$a(a - 2) + 5(a - 2) = 0$$
$$a^2 - 2a + 5a - 10 = 0$$
$$a^2 + 3a - 10 = 0$$

නිදසුන 3

මූල $-\frac{1}{2}$ හා $\frac{3}{2}$ වන වර්ගජ සමීකරණය ගොඩනගන්න.

අඥාතය m ලෙස ගනිමු. $m = -\frac{1}{2}$ හෝ $m = \frac{3}{2}$

$$2m = -1 \text{ හෝ } 2m = 3$$
$$2m + 1 = 0 \text{ හෝ } 2m - 3 = 0$$
$$(2m + 1)(2m - 3) = 0$$
$$4m^2 - 4m - 3 = 0$$

නිදසුන 4

$x = 1$ (සමපාත) මූල පවතින වර්ගජ සමීකරණය ගොඩනගන්න.

$$x = 1 \text{ හෝ } x = 1$$
$$(x - 1) = 0 \text{ හෝ } (x - 1) = 0$$
$$(x - 1)(x - 1) = 0$$
$$x(x - 1) - 1(x - 1) = 0$$
$$x^2 - x - x + 1 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

සටහන

මූල a හා b වන වර්ගජ සමීකරණය $(x - a)(x - b) = 0$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

11.2 අභ්‍යාසය

1. පහත සඳහන් මූල ඇති වර්ගජ සමීකරණ ගොඩනගන්න.

(i) $x = 3,\ 4$ (ii) $a = -2,\ 5$ (iii) $p = -1,\ 0$

(iv) $m = 4,\ -1$ (v) $a = 3$ (සමපාත මූල) (vi) $l = -2$ (සමපාත මූල)

(vii) $q = \frac{3}{2},\ -\frac{5}{2}$ (viii) $n = 2\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}$ (ix) 4 හා 3 (x) 1 හා $\frac{1}{2}$

වර්ගායිත ප්‍රකාශන

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- a — පළමු පදය
- b — දෙවන පදය
- a^2 — පළමු පදයේ වර්ගය
- $2ab$ — පද දෙකේ ගුණිතයේ දෙගුණය
- b^2 — දෙවන පදයේ වර්ගය

ද්විපද වීජීය ප්‍රකාශනයක වර්ගායිතය ලබා ගන්නා ආකාරය ඉහත දක්වා ඇත. පහත වර්ගායිත ප්‍රකාශන ද අධ්‍යයනය කර බලන්න.

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$
$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$
$$(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$$
$$(a - 3)^2 = a^2 - 6a + 9$$

ද්විපද වීජීය ප්‍රකාශනවල ප්‍රසාරණය දකුණුපස දැක්වේ. දකුණුපස ප්‍රකාශනවල මැද පදයේ සංගුණකය දෙකට බෙදා වර්ග කිරීමෙන් නියත පදය ලැබෙන බව ඔබට පෙනෙනු ඇත. වර්ග පදයේ සංගුණකය 1 වන විට මැද පදයේ සංගුණකය දෙකෙන් බෙදා ලැබෙන අගය අඥාත පදය සමග එකතු කර වර්ග කිරීමෙන් පූර්ණ වර්ගය ලැබෙන අයුරු ඔබට පැහැදිලි වනු ඇත.

$x^2 + 8x + 16$ ප්‍රකාශනයේ මැද පදයේ සංගුණකය 8 වේ. එය 2න් බෙදූ විට 4 වේ.
එවිට $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ වේ.

$x^2 + 10x$ ... පූර්ණ වර්ගයක් වීමට හිස්තැන සඳහා එකතු කළ යුතු නියත පදය සොයමු.

$\left(\frac{+10}{2}\right)^2 = 5^2 = 25$ වේ. එනම් $x^2 + 10x + \underline{25} = (x + 5)^2$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

මේ ආකාරයට වර්ගජ ප්‍රකාශනය පූර්ණ වර්ගයක් වීමට අවශ්‍ය නියත පදය සොයා ගත් පසු එය පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි ය.

නිදසුන 1

$a^2 + 12a + \ldots\ldots$ හිස්තැනට සුදුසු අගය සොයා එය පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස ලියන්න.

$$\left(\frac{+12}{2}\right)^2 = 6^2 = 36$$

$$a^2 + 12a + \underline{36} = (a + 6)^2$$

නිදසුන 2

$m^2 - 14m + \ldots\ldots$ හිස්තැනට සුදුසු අගය සොයා එය පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස ලියන්න.

$$\left(\frac{-14}{2}\right)^2 = (-7)^2 = 49$$

$$m^2 - 14m + \underline{49} = (m - 7)^2$$

11.3 අභ්‍යාසය

1. පහත සඳහන් එක් එක් ප්‍රකාශනය පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස ලිවීම සඳහා හිස්තැනට සුදුසු අගය ලියා එය පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස ලියන්න.

(i) $a^2 + 16a + ... = (a + ...)^2$

(ii) $m^2 + 24m + ... = (m + ...)^2$

(iii) $q^2 - 2q + ... = (q - ......)^2$

(iv) $n^2 - 26n + ... = (n - ......)^2$

(v) $y^2 + 20y + ... = (y + ...)^2$

(vi) $m^2 + ... + 9 = (...... + ...)^2$

11.3 වර්ග පූර්ණයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම

වර්ගජ සමීකරණයක මූල සෙවීමේ දී ද වර්ග පූරණ ක්‍රමය යොදා ගත හැකි ය. අපි එය වර්ග පූර්ණයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම ලෙස හඳුන්වමු. මෙමගින් සාධක සහිත වර්ගජ සමීකරණ විසඳිය හැකි වුවත් පහසුවෙන් සාධකවලට වෙන් කළ නොහැකි වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම සඳහා වඩාත් ප්‍රයෝජනවත් වේ.

මෙම කොටසේ දී $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ $a = 1$ සහ b සඳහා ඉරට්ට සංඛ්‍යා ඇති අවස්ථා පමණක් සලකමු.

නිදසුන 1

$x^2 + 6x + 8 = 0$ වර්ග පූර්ණය කිරීමෙන් විසඳන්න.

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$x^2 + 6x = -8$

$x^2 + 6x + 3^2 = -8 + 3^2$ (මැද පදයේ සංගුණකය දෙකෙන් බෙදා වර්ග කර දෙපසටම එකතු කිරීමෙන්)

$x^2 + 6x + 9 = -8 + 9$

$(x + 3)^2 = 1$ (වම්පස පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස)

$x + 3 = \pm\sqrt{1}$

$x + 3 = \pm 1$

$x = +1 - 3$ හෝ $x = -1 - 3$

$x = -2$ හෝ $x = -4$

$\therefore$ විසඳුම් $x = -2$ හා $x = -4$ වේ.

නිදසුන 2

$a^2 + 8a - 4 = 0$ වර්ග පූර්ණය කිරීමෙන් විසඳා පිළිතුර දශම ස්ථාන දෙකකට නිවැරදි ව සොයන්න. $\sqrt{20} = 4.47$ ලෙස සලකන්න.

$$a^2 + 8a - 4 = 0$$
$$a^2 + 8a = 4$$

මැද පදයේ සංගුණකය දෙකෙන් බෙදා වර්ග කර සමීකරණය දෙපසට එකතු කිරීමෙන්,

$$a^2 + 8a + 4^2 = 4 + 4^2$$
$$a^2 + 8a + 16 = 4 + 16$$
$$(a + 4)^2 = 20$$
$$a + 4 = \pm\sqrt{20}$$
$$a + 4 = \pm 4.47$$
$$a = \pm 4.47 - 4$$

$a = + 4.47 - 4$ හෝ $a = - 4.47 - 4$

$a = 0.47$ හෝ $a = - 8.47$ $\therefore$ විසඳුම් $a = 0.47$ හා $x = - 8.47$ වේ.

11.4 අභ්‍යාසය

1. පහත දී ඇති සමීකරණ වර්ග පූර්ණය කිරීමෙන් විසඳන්න.
($\sqrt{2} = 1.41$ සහ $\sqrt{3} = 1.73$ ලෙස ගන්න.)

(i) $a^2 + 4a + 3 = 0$ (ii) $m^2 + 12m + 35 = 0$ (iii) $x^2 + 12x + 24 = 0$

(iv) $x^2 - 2x - 7 = 0$ (v) $x^2 - 6x + 7 = 0$

2. පහත දී ඇති සමීකරණ වර්ග පූර්ණය කිරීමෙන් විසඳන්න.

(i) $a^2 + 2a - 4 = 0$ (ii) $p^2 - 4p + 1 = 0$ (iii) $y^2 + 2y - 1 = 0$

(iv) $m^2 + 6m = 4$ (v) $x^2 + 4x = 1$

11.4 සූත්‍රය භාවිතයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම

a, b, c යනු $a \neq 0$ වන පරිදි වූ සංඛ්‍යා තුනක් වන විට $ax^2 + bx + c = 0$ යනු වර්ගජ සමීකරණයේ සාධාරණ ආකාරය වේ. මෙම සමීකරණය වර්ග පූර්ණයෙන් විසඳා බලමු.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

x^2 හි සංගුණකය 1 බවට පත් කිරීම සඳහා මෙම සමීකරණය a වලින් බෙදමු.

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

මැද පදයේ සංගුණකය දෙකෙන් බෙදා වර්ග කර දෙපසටම එකතු කරමු. $\left(\frac{b}{a} \div 2 = \frac{b}{a} \times \frac{1}{2} = \frac{b}{2a}\right)$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\therefore$ $ax^2 + bx + c = 0$ ආකාරයේ වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම සඳහා $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ යන සූත්‍රය භාවිත කළ හැකි ය. මෙහි a යනු x^2 හි සංගුණකයයි. b යනු x හි සංගුණකයයි. c යනු නියත පදයයි.

නිදසුන 1

$x^2 + 10x + 16 = 0$ සමීකරණය සූත්‍රය භාවිතයෙන් විසඳන්න.

$x^2 + 10x + 16 = 0$ මෙහි, $a = 1$, $b = 10$, $c = 16$ වේ.

a, b, c අගයන් $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ සූත්‍රයට ආදේශයෙන්,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - (4 \times 1 \times 16)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x = \frac{-10 \pm 6}{2}$$

$x = -5 + 3$ හෝ $x = -5 - 3$

$x = -2$ හෝ $x = -8$ $\therefore$ විසඳුම් $x = -2$ හා $x = -8$ වේ.

නිදසුන 2

$p^2 + 4p - 10 = 0$ සමීකරණය සූත්‍රය භාවිතයෙන් විසඳන්න.

$p^2 + 4p - 10 = 0$ මෙහි, $a = 1$, $b = 4$, $c = -10$ වේ.

a, b, c අගයන් $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ සූත්‍රයට ආදේශයෙන්,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$p = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - [4 \times 1 \times (-10)]}}{2 \times 1}$$

$$p = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 40}}{2}$$

$$p = \frac{-4 \pm \sqrt{56}}{2}$$

$$p = \frac{-4 \pm 7.48}{2}$$ ($\sqrt{56} = 7.48$ වේ.)

$p = -2 \pm 3.74$

$p = -2 + 3.74$ හෝ $p = -2 - 3.74$

$p = 1.74$ හෝ $p = -5.74$ $\therefore$ විසඳුම් $p = 1.74$ හා $p = -5.74$ වේ.

නිදසුන 3

$m + \frac{5}{2m} = 4$ සමීකරණය, සූත්‍රය භාවිතයෙන් මූල සොයන්න.

$m + \frac{5}{2m} = 4$

$(m \times 2m) + (\frac{5}{2m} \times 2m) = 4 \times 2m$

$$2m^2 + 5 = 8m$$
$$2m^2 - 8m + 5 = 0$$

මෙහි, $a = 2,\ b = -8,\ c = 5$ අගයන් සූත්‍රයට ආදේශයෙන්,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - (4 \times 2 \times 5)}}{2 \times 2}$$

$$m = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 40}}{4}$$

$$m = \frac{8 \pm \sqrt{24}}{4}$$

$$m = \frac{8 \pm 4.9}{4}$$

$m = \frac{8 + 4.9}{4}$ හෝ $m = \frac{8 - 4.9}{4}$

$m = \frac{12.9}{4}$ හෝ $m = \frac{3.1}{4}$

$m = 3.225$ හෝ $m = 0.775$ $\therefore$ විසඳුම් $m = 3.23$ හා $m = 0.78$ වේ.

11.5 අභ්‍යාසය

1. පහත වර්ගජ සමීකරණ සූත්‍රය භාවිතයෙන් විසඳන්න.

(i) $x^2 - 5x - 3 = 0$ (ii) $m^2 + 3m - 8 = 0$ (iii) $2y^2 + 5y - 4 = 0$

(iv) $2x^2 + 5x - 12 = 0$ (v) $12 = 6x + 4x^2$ (vi) $3a = a^2 - 5$

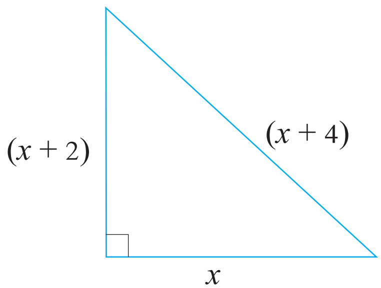
(vii) $x^2 + 4x - 20 = 0$ (viii) $x^2 + 2x = 20$

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. ත්‍රිකෝණ සංඛ්‍යා රටාවේ 78 යෙදෙන්නේ කී වෙනි ත්‍රිකෝණ සංඛ්‍යාව ලෙස ද?

2. ධම්ම පදයේ එක් ගාථාවක ඇති පද ගණන මෙන් (ආසන්න වශයෙන්) විසි ගුණයක් ගාථා ඇත. ධම්ම පදය පුරාවට පද ආසන්න වශයෙන් 8820 ඇත්නම් එක් ගාථාවක ඇති පද ගණන සොයන්න.

3. දී ඇති සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ පාදවල දිග රූපයේ දක්වා ඇත. මෙහි $x > 5$ වේ.



(i) පයිතගරස් සම්බන්ධය භාවිතයෙන් $(x+4)$, $(x+2)$ හා x අතර සම්බන්ධය ලියන්න.
(ii) ඉහත x මගින් $x^2 - 4x - 12 = 0$ සමීකරණය තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.
(iii) එම සමීකරණය විසඳීමෙන් x සඳහා ගත හැකි අගය ලබා ගන්න.
(iv) ත්‍රිකෝණයේ පාද තුනේ දිග වෙන වෙන ම සොයන්න.

4. 18, 15, 12, ... සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ පද n ගණනක ඓක්‍යය -345කි. සමාන්තර ශ්‍රේඪි පිළිබඳ දැනුම භාවිතයෙන්,
(i) පද ගණන n ලෙස ගෙන n හි වර්ගජ සමීකරණයක් ගොඩනගන්න.
(ii) ඉහත සමීකරණය විසඳා පද ගණන සොයන්න.

සාරාංශය

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.
- "සාධක දෙකක ගුණිතයක් ශූන්‍යයට සමාන වේ නම් එහි එක් එක් සාධකය ශූන්‍යයට සමාන වේ" යන ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳිය හැකි ය.
- සාධකවල ගුණිතයක් ලෙස පහසුවෙන් ලිවිය නොහැකි වර්ගජ සමීකරණ විසඳීමට වර්ග පූර්ණ ක්‍රමය යොදා ගත හැකි ය.
- මූල a හා b ලෙස දී ඇති විට අවශ්‍ය වර්ගජ සමීකරණය $(x - a)(x - b) = 0$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.
- a, b හා c යනු $a \neq 0$ වන පරිදි වූ තාත්වික සංඛ්‍යා තුනක් වන විට $ax^2 + bx + c = 0$ ආකාරයේ සමීකරණයක විසඳුම් සෙවීම සඳහා $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ සූත්‍රය භාවිත කළ හැකි ය.

12 ප්‍රස්තාර

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ වර්ගජ ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාර ඇඳීමට,
- $y = \pm (x \pm a)^2 + b$ ආකාරයේ වර්ගජ ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාර ඇඳීමට,
- ප්‍රස්තාර ඇසුරින් වර්ගජ ශ්‍රිතවල හැසිරීම විග්‍රහ කිරීමට,

හැකියාව ලැබේ.

12.1 හැඳින්වීම

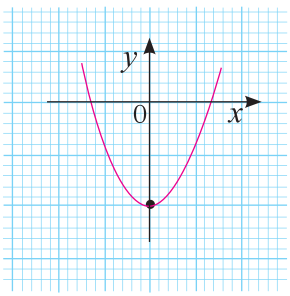
පහත ආකාරයේ වර්ගජ ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාර පිළිබඳ ව පෙර ශ්‍රේණියේදී ඉගෙන ඇත. එය පිළිබඳව නැවත මතකයට නගා ගනිමු.

$y = ax^2$

$y = ax^2 + b$

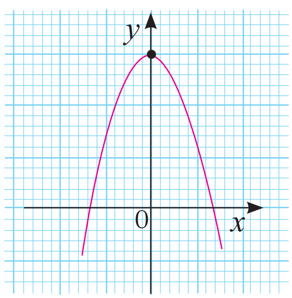
x^2 හි සංගුණකයේ ධන හෝ සෘණ ස්වභාවය අනුව වර්ගජ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරය ආකාර දෙකකි. x^2 හි සංගුණකය ධන අගයක් නම් ශ්‍රිතයට ඇත්තේ අවම හැඩයකි. x^2 හි සංගුණකය සෘණ අගයක් නම් ශ්‍රිතයට ඇත්තේ උපරිම හැඩයකි.

x^2 හි සංගුණකය ධන අගයක් වන විට



අවම අගයක් ඇති ප්‍රස්තාරයක හැඩය

x^2 හි සංගුණකය සෘණ අගයක් වන විට



උපරිම අගයක් ඇති ප්‍රස්තාරයක හැඩය

$y = ax^2$ හා $y = ax^2 + b$ ආකාරයේ ප්‍රස්තාර පිළිබඳ දැනුම භාවිතයෙන් පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසයේ යෙදෙමු.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. $y = x^2 - 4$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාර ඇඳීම සඳහා ගොඩනගන ලද x හා y ඇතුළත් අගය වගුව පහත දැක්වේ.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	5	0	.....	–4	.....	0	5

(a) (i) ඉහත වගුවේ හිස්තැන් පුරවන්න.
  (ii) වගුවේ තොරතුරු භාවිත කර සුදුසු පරිමාණයක් යොදා ගනිමින් ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

(b) අඳින ලද ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් පහත දැක්වෙන අගයන් ලබා ගන්න.
  (i) අවම අගය
  (ii) ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක
  (iii) ශ්‍රිතය සෘණ වන x හි අගය පරාසය
  (iv) ශ්‍රිතය සෘණව අඩු වන x හි අගය පරාසය
  (v) ශ්‍රිතය සෘණව වැඩි වන x හි අගය පරාසය
  (vi) $y = -1$ වන x හි අගයන්

2. $y = 4 - x^2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාර ඇඳීම සඳහා ගොඩනගන ලද x හා y ඇතුළත් අගය වගුව පහත දැක්වේ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	0	3	.....	3	0	-5

(a) (i) ඉහත වගුවේ හිස්තැන් පුරවන්න.
  (ii) වගුවේ තොරතුරු භාවිත කර සුදුසු පරිමාණයක් යොදා ගනිමින් ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

(b) අඳින ලද ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් පහත දැක්වෙන අගයන් ලබා ගන්න.
  (i) උපරිම අගය
  (ii) ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක
  (iii) ශ්‍රිතය ධන වන x හි අගය පරාසය
  (iv) ශ්‍රිතය ධන ව වැඩි වන x හි අගය පරාසය
  (v) ශ්‍රිතය ධන ව අඩු වන x හි අගය පරාසය
  (vi) ශ්‍රිතය සෘණ වන x හි අගය පරාසය
  (vii) $y = 1$ වන x හි අගය
  (viii) $\sqrt{5}$ හි අගය පළමු දශමස්ථානයට
  (ix) $4 - x^2 = 0$ සමීකරණයේ මූල

12.2 $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාර

ඔබ උගෙන ඇති $y = ax^2$ හා $y = ax^2 + b$ ආකාරයේ ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාර y අක්ෂය වටා සමමිතික වේ. $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ වර්ගජ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාර පිළිබඳ ව මීළඟට අවධානය යොමු කරමු.

$a > 0$ විට $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ වර්ගජ ශ්‍රිත

පහත නිදසුනට අවධානය යොමු කරමු.

නිදසුන 1

$y = x^2 + 2x - 3$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය x හි අගය -4 සිට $+2$ තෙක් පරාසය තුළ අඳිමු. අදාළ පරාසය තුළ අගය වගුව පහත පරිදි ගොඩනඟා ගත හැකි ය.

$x = -4$ වූ විට, $y = (-4)^2 + [2 \times (-4)] - 3 = 16 + (-8) - 3 = 5$

$x = -3$ වූ විට, $y = (-3)^2 + [2 \times (-3)] - 3 = 9 + (-6) - 3 = 0$

$x = -2$ වූ විට, $y = (-2)^2 + [2 \times (-2)] - 3 = 4 + (-4) - 3 = -3$

$x = -1$ වූ විට, $y = (-1)^2 + [2 \times (-1)] - 3 = 1 + (-2) - 3 = -4$

$x = 0$ වූ විට, $y = (0)^2 + [2 \times (0)] - 3 = 0 + 0 - 3 = -3$

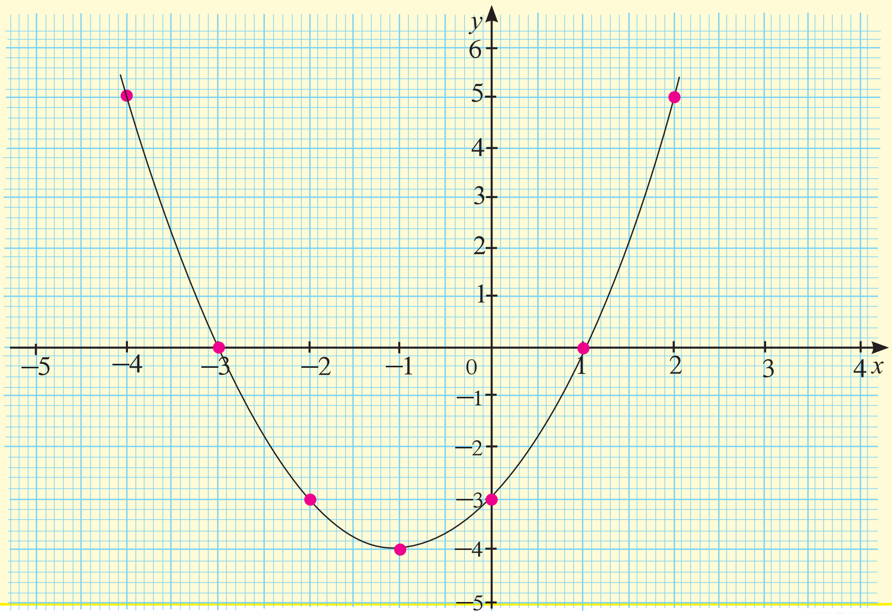
$x = +1$ වූ විට, $y = (+1)^2 + [2 \times (+1)] - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$

$x = +2$ වූ විට, $y = (+2)^2 + [2 \times (+2)] - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$

මෙය තොරතුරු පහත වගුවේ දක්වමු.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	5	0	-3	-4	-3	0	5
පටිපාටිගත යුගල ලෙස දැක් වූ විට	$(-4, 5)$	$(-3, 0)$	$(-2, -3)$	$(-1, -4)$	$(0, -3)$	$(1, 0)$	$(2, 5)$

x අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 10කින් ඒකකයක් ද y අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 5කින් ඒකකයක් ද නිරූපණය වන සේ පරිමාණය ගෙන ඛණ්ඩාංක තලයක එම පටිපාටිගත යුගල ලකුණු කර අඳින ලද ප්‍රස්තාරය පහත දැක්වේ.



මෙම ප්‍රස්තාරය නිරීක්ෂණය කළ විට පහත කරුණු අවබෝධ කර ගත හැකි වේ.

- y හි එකම අගයට අනුරූපව xහි අගයන් 2ක් ඇත. එනම්,
  $(-4, 5)$, $(2, 5)$
  $(-3,0)$, $(1, 0)$
  $(-2, -3)$, $(0, 3)$ වේ.
- මෙම පටිපාටිගත යුගල ඛණ්ඩාංක තලයක ලකුණු කළ විට, එම ලක්ෂ්‍යවල පිහිටීම් වක්‍රයක ආකාර ගනී. මේ අනුව, වර්ගජ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරය සෑම විටම වක්‍රාකාර හැඩ ගන්නා අතර, එම හැඩය පරාවලයක් යනුවෙන් හැඳින්වේ.
- වක්‍රයේ විවිධ ලක්ෂ්‍යවලදී අනුක්‍රමණ වෙනස් වේ.
- ප්‍රස්තාරය $x = -1$ රේඛාව වටා සමමිතික වෙයි. එනම්, ප්‍රස්තාරයේ සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය $x = -1$වේ.
- xහි අගය -3 සිට $+1$ තෙක් වැඩිවන විට, ශ්‍රිතය සෘණව පවතී. ඒ අනුව, ශ්‍රිතය සෘණව පවත්නා xහි පරාසය $-3 < x < +1$ වේ.
- ශ්‍රිතයේ අවම අගය -4 වන අතර හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ (වර්තන ලක්ෂ්‍යයේ) ඛණ්ඩාංක $(-1 , -4)$ වේ. මෙය ශීර්ෂය නමින් ද හැඳින්වේ.
- මෙම ශ්‍රිතය අනුව $x^2 + 2x - 3 = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල ලබා ගත හැකි ය. ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය මගින් x අක්ෂය ලක්ෂ්‍ය දෙකකදී ඡේදනය කර ඇත. $x = -3$ සහ $x = +1$ එම අගයන් වේ. එම අගයන් $x^2 + 2x - 3 = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ.

නිදසුන 2

$y = 2x^2 - 2x - 5$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය x හි අගය -2 සිට $+5$ තෙක් පරාසය තුළ අඳිමු. අදාළ පරාසය තුළ අගය වගුව පහත පරිදි ගොඩනගා ගත හැකි ය.

$x = -2$ වූ විට, $y = [2 \times (-2)^2] - [2 \times (-2)] -5 = 8 - (-4) -5 = 8 + 4 -5 = 7$

$x = -1$ වූ විට, $y = [2 \times (-1)^2] - [2 \times (-1)] -5 = 2 - (-2) -5 = 2 + 2 -5 = -1$

$x = 0$ වූ විට, $y = [2 \times (0)^2] - [2 \times 0] -5 = 0 - 0 -5 = 0 -5 = -5$

$x = 1$ වූ විට, $y = [2 \times (1)^2] - [2 \times 1] -5 = 2 - 2 -5 = 0 -5 = -5$

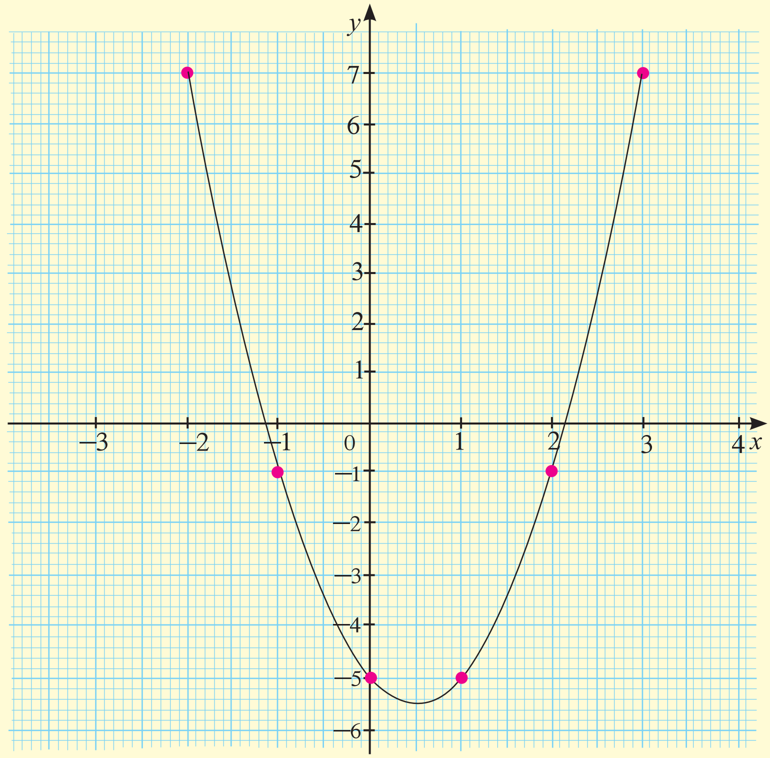
$x = 2$ වූ විට, $y = [2 \times (2)^2] - [2 \times 2] -5 = 8 - 4 -5 = 4 -5 = -1$

$x = 3$ වූ විට, $y = [2 \times (3)^2] - [2 \times 3] -5 = 18 - 6 -5 = 12 -5 = 7$

මෙම තොරතුරු පහත වගුවේ දක්වමු.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	7	-1	-5	-5	-1	7
පටිපාටිගත යුගල ලෙස දැක් වූ විට	$(-2, 7)$	$(-1, -1)$	$(0, -5)$	$(1, -5)$	$(2, -1)$	$(3, 7)$

x අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 10කින් ඒකකයක් ද y අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 5කින් ඒකකයක් ද නිරූපණය වන සේ පරිමාණය ගෙන ඛණ්ඩාංක තලයක එම පටිපාටිගත යුගල ලකුණු කර අඳින ලද ප්‍රස්තාරය පහත දැක්වේ.



මෙම ප්‍රස්තාරය නිරීක්ෂණය කළ විට පහත කරුණු අවබෝධ කර ගත හැකි වේ.

- ශ්‍රිතයේ අවම අගය −5.5
- සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය $x = 0.5$
- ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක (0.5, −5.5)
- ශ්‍රිතය සෘණවන xහි පරාසය $-1.2 < x < 2.2$
- ශ්‍රිතය සෘණව අඩු වන xහි පරාසය $-1.2 < x < 0.5$
- ශ්‍රිතය සෘණව වැඩි වන xහි පරාසය $0.5 < x < 2.2$
- $2x^2 - 2x - 5 = 0$ සමීකරණයේ මූල $x = -1.15$, 2.15

$a < 0$ විට $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ වර්ගජ ශ්‍රිත

පහත නිදසුනට අවධානය යොමු කරමු.

නිදසුන 3

$-4 \leq x \leq 2$ පරාසය තුළ $y = -x^2 - 2x + 5$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳිමු. අදාළ පරාසය තුළ අගය වගුව පහත පරිදි ගොඩනඟා ගත හැකි ය.

$x = -4$ වූ විට, $y = -(-4)^2 - [2 \times (-4)] + 5 = -16 - (-8) + 5 = -16 + 8 + 5 = -3$

$x = -3$ වූ විට, $y = -(-3)^2 - [2 \times (-3)] + 5 = -9 - (-6) + 5 = -9 + 6 + 5 = +2$

$x = -2$ වූ විට, $y = -(-2)^2 - [2 \times (-2)] + 5 = -4 - (-4) + 5 = -4 + 4 + 5 = +5$

$x = -1$ වූ විට, $y = -(-1)^2 - [2 \times -1] + 5 = -1 - (-2) + 5 = -1 + 2 + 5 = +6$

$x = 0$ වූ විට, $y = -(0)^2 - [2 \times 0] + 5 \quad = \quad 0 - 0 + 5 \quad = 0 + 5 = +5$

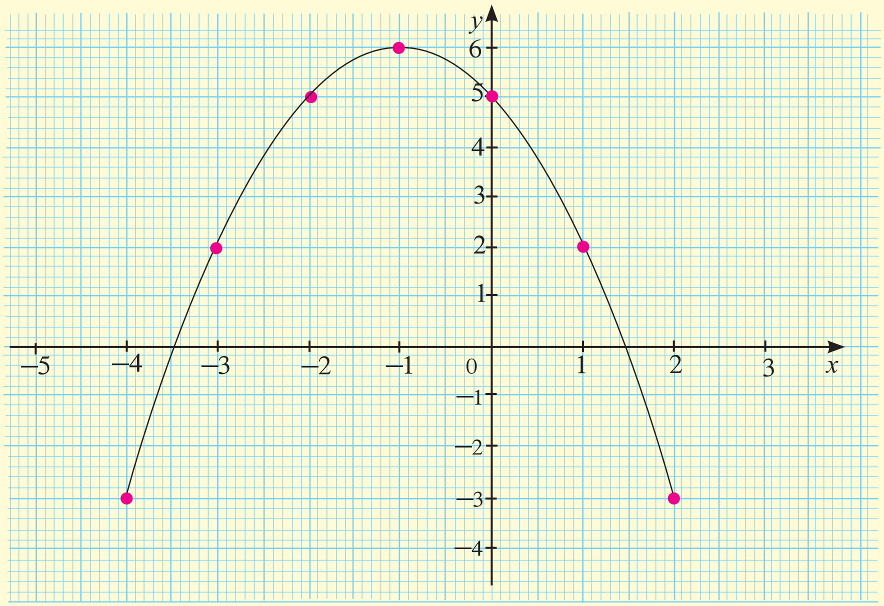
$x = 1$ වූ විට, $y = -(1)^2 - [2 \times 1] + 5 \quad = -1 - 2 + 5 \quad = -3 + 5 = +2$

$x = 2$ වූ විට, $y = -(2)^2 - [2 \times 2] + 5 \quad = -4 - 4 + 5 \quad = -8 + 5 = -3$

මෙම තොරතුරු පහත වගුවේ දක්වමු.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	-3	2	5	6	5	2	-3
පටිපාටිගත යුගල ලෙස දැක් වූ විට	$(-4, -3)$	$(-3, 2)$	$(-2, 5)$	$(-1, 6)$	$(0, 5)$	$(1, 2)$	$(2, -3)$

x අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 10කින් ඒකකයක් ද y අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 5කින් ඒකකයක් ද නිරූපණය වන සේ පරිමාණය ගෙන ඛණ්ඩාංක තලයක එම පටිපාටිගත යුගල ලකුණු කර අඳින ලද ප්‍රස්තාරය පහත දැක්වේ.



මෙම ප්‍රස්තාරය නිරීක්ෂණය කළ විට පහත කරුණු අවබෝධ කර ගත හැකි වේ.

- $y = -x^2 - 2x + 5$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය පරාවලයක හැඩය ගනී.
- ප්‍රස්තාරය $x = -1$ වටා සමමිතික වේ. එබැවින් සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය $x = -1$ වේ.
- xහි අගය -3.5 සිට $+1.5$ තෙක් වැඩි වන විට ශ්‍රිතය ධනව පවතී. ඒ අනුව ශ්‍රිතය ධනව පවතින xහි පරාසය $-3.5 \leq x \leq 1.5$ වේ.
- ශ්‍රිතයේ උපරිම අගය $+6$ වන අතර හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(-1, 6)$ වේ.
- ඉහත ශ්‍රිතය අනුව $-x^2 - 2x + 5 = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල $x = -3.5$, 1.5 වේ.

නිදසුන 4

$-2 \leq x \leq 3$ පරාසය තුළ $y = 1 + 2x - 2x^2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳිමු. අදාළ පරාසය තුළ අගය වගුව පහත පරිදි ගොඩනඟා ගත හැකි ය.

$x = -2$ වූ විට, $y = 1 + [2 \times (-2)] - [2 \times (-2)^2] = 1 + (-4) - 8 = 1 - 4 - 8 = -11$

$x = -1$ වූ විට, $y = 1 + [2 \times (-1)] - [2 \times (-1)^2] = 1 + (-2) - 2 = 1 - 2 - 2 = -3$

$x = -0.5$ වූ විට, $y = 1 + [2 \times (-0.5)] - [2 \times (-0.5)^2] = 1 + (-1) - 0.5 = 1 - 1 - 0.5 = -0.5$

$x = 0$ වූ විට, $y = 1 + [2 \times 0] - [2 \times 0^2] = 1 + 0 - 0 = 1$

$x = 1$ වූ විට, $y = 1 + [2 \times 1] - [2 \times 1^2] = 1 + 2 - 2 = 1$

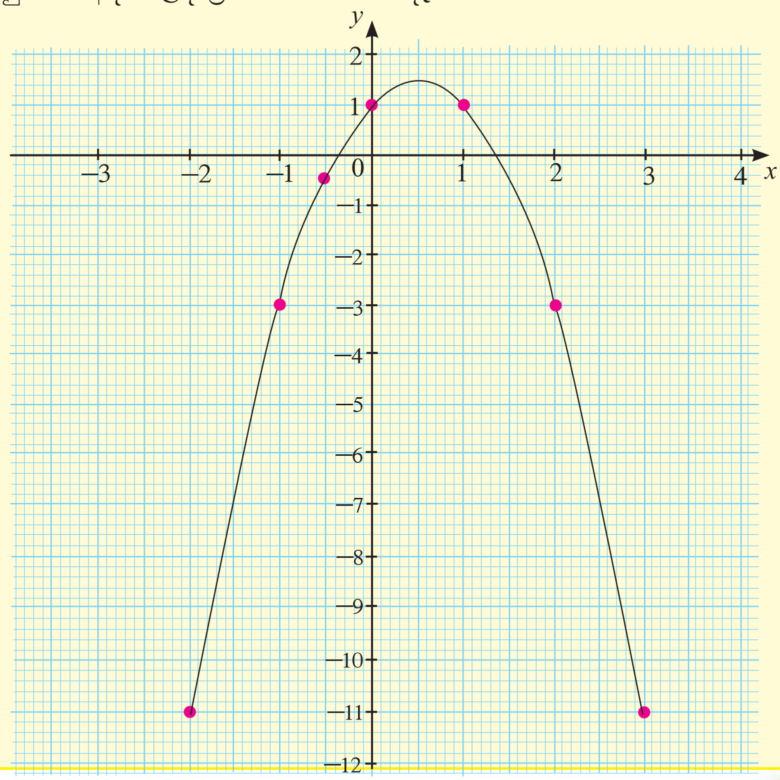
$x = 2$ වූ විට, $y = 1 + [2 \times 2] - [2 \times 2^2] = 1 + 4 - 8 = 5 - 8 = -3$

$x = 3$ වූ විට, $y = 1 + [2 \times 3] - [2 \times 3^2] = 1 + 6 - 18 = 7 - 18 = -11$

මෙය තොරතුරු පහත වගුවේ දක්වමු.

x	-2	-1	-0.5	0	1	2	3
y	-11	-3	-0.5	1	1	-3	-11
පටිපාටිගත යුගල ලෙස දැක් වූ විට	$(-2, -11)$	$(-1, -3)$	$(-0.5, -0.5)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(2, -3)$	$(3, -11)$

x අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 10කින් ඒකකයක් ද y අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 5කින් ඒකකයක් ද නිරූපණය වන සේ පරිමාණය ගෙන බණ්ඩාංක තලයක එම පටිපාටිගත යුගල ලකුණු කර අඳින ලද ප්‍රස්තාරය පහත දැක්වේ.



මෙම ප්‍රස්තාරය නිරීක්ෂණය කළ විට පහත කරුණු අවබෝධ කර ගත හැකි වේ.

- ශ්‍රිතයේ උපරිම අගය 1.5
- සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය $x = 0.5$
- ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක (0.5, 1.5)
- ශ්‍රිතය ධන ව වැඩි වෙමින් පවතින xහි පරාසය $-0.35 < x < 0.5$
- $1 + 2x - 2x^2 = 0$ සමීකරණයේ මූල $x = -0.35$, 1.35

12.1 අභ්‍යාසය

1. $y = x^2 - 2x - 4$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාර ඇඳීම සඳහා ගොඩනගන ලද x හා y ඇතුළත් අගය වගුව පහත දැක්වේ.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	-1	-4	.....	.....	-1	4

(*a*) (i) වගුවේ හිස්තැන් පුරවන්න.
(ii) වගුව භාවිත කර සුදුසු පරිමාණයකට අනුව ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

(*b*) ඔබ ඇඳි ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්,
(i) අවම අගය සොයන්න.
(ii) සමමිති රේඛාවේ සමීකරණය ලියන්න.
(iii) හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.
(iv) ශ්‍රිතය ඍණ වන xහි අගය පරාසය සොයන්න.
(v) ශ්‍රිතය ඍණ ව අඩු වන x හි අගය පරාසය සොයන්න.
(vi) ශ්‍රිතය ඍණ ව වැඩි වන x හි අගය පරාසය සොයන්න.
(vii) ශ්‍රිතය ධන වන x හි අගය පරාසය සොයන්න.
(viii) $x^2 - 2x - 4 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල සොයන්න.

2. $y = 1 - 2x - x^2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීම සකස් කළ x හා y අගය ඇතුළත් අසම්පූර්ණ වගුවක් පහත දැක්වේ.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	-7	-2	1	2	1	.....	-7

(*a*) (i) වගුවේ හිස්තැන් පුරවන්න.
(ii) වගුව භාවිත කර සුදුසු පරිමාණයක් ගෙන ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

(*b*) ඔබේ ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්,
(i) හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංකය සොයන්න.
(ii) සමමිති රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.
(iii) $1 - 2x - x^2 = 0$ සමීකරණයේ මූල සොයන්න.
(iv) ශ්‍රිතය ධන ව වැඩි වන x හි අගය පරාසය සොයන්න.
(v) ශ්‍රිතයෙහි අගය -3 වන විට x හි අගයන් සොයන්න.

3. $y = x^2 - 4x + 2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීම සඳහා $-1 \leq x \leq 5$ පරාසය තුළ අගය වගුවක් ගොඩ නගන්න.

(*a*) සුදුසු පරිමාණයක් ගෙන ඉහත ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.
(*b*) අඳින ලද ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්,
(i) ප්‍රස්තාරයේ ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක ලියන්න.
(ii) සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය ලියන්න.
(iii) ශ්‍රිතය සෘණ වන x හි අගය පරාසය ලියන්න.
(iv) $2 - 4x + x^2 = 0$ සමීකරණයේ මූල සොයන්න.

4. $y = 3 - 2x^2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීම සඳහා $-3 \leq x \leq 3$ පරාසය තුළ අගය වගුවක් ගොඩ නගන්න.
(*a*) සුදුසු පරිමාණයක් ගෙන ඉහත ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.
(*b*) අඳින ලද ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්,
(i) සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය ලියන්න.
(ii) $y = -2$ වන xහි අගයන් සොයන්න.
(iiii) ශ්‍රිතයේ අගය ධනව වැඩි වෙමින් පවතින x හි අගය පරාසය ලියන්න.
(iv) $3 - 2x^2 = 0$ සමීකරණයේ මූල ලබා ගන්න.

12. 3 $y = \pm(x \pm a)^2 + b$ ආකාරයේ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාර

$y = \pm(x \pm a)^2 + b$ ආකාරයේ වර්ගජ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාර පිළිබඳව මීළඟට අවධානය යොමු කරමු.

නිදසුන 1

$-5 \leq x \leq 1$ පරාසය තුළ $y = (x + 2)^2 - 2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳිමු.

අදාළ පරාසය තුළ අගය වගුව පහත පරිදි ගොඩනගා ගත හැකි ය.

$y = (x + 2)^2 - 2$

$x = -5$ වූ විට $y = (-5 + 2)^2 - 2$
$= (-3)^2 - 2$
$= 9 - 2$
$= 7$

$x = -4$ වූ විට $y = (-4 + 2)^2 - 2$
$= (-2)^2 - 2$
$= 4 - 2$
$= 2$

$x = -3$ වූ විට $y = (-3 + 2)^2 - 2$
$= (-1)^2 - 2$
$= 1 - 2$
$= -1$

$x = -2$ වූ විට $y = (-2 + 2)^2 - 2$
$= (0)^2 - 2$
$= 0 - 2$
$= -2$

$x = -1$ වූ විට $y = (-1 + 2)^2 - 2$
$= (1)^2 - 2$
$= 1 - 2$
$= -1$

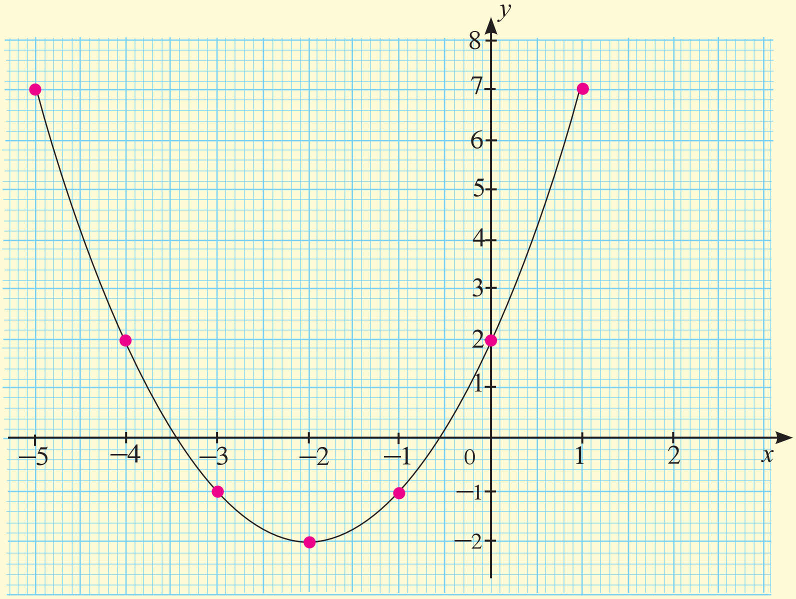
$x = 0$ වූ විට $y = (0 + 2)^2 - 2$
$= (2)^2 - 2$
$= 4 - 2$
$= 2$

$x = 1$ වූ විට $y = (1 + 2)^2 - 2$
$= (3)^2 - 2$
$= 9 - 2$
$= 7$

මෙම තොරතුරු පහත වගුවේ දක්වමු.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	7	2	-1	-2	-1	2	7
පටිපාටිගත යුගල ලෙස දැක් වූ විට	$(-5, 7)$	$(-4, 2)$	$(-3, -1)$	$(-2, -2)$	$(-1, -1)$	$(0, 2)$	$(1, 7)$

x අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 10කින් ඒකකයක් ද y අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 5කින් ඒකකයක් ද නිරූපණය වන සේ පරිමාණය ගෙන බණ්ඩාංක තලයක එම පටිපාටිගත යුගල ලකුණු කර අඳින ලද ප්‍රස්තාරය පහත දැක්වේ.



ඉහත ප්‍රස්තාරය නිරීක්ෂණය කළ විට පහත කරුණු අවබෝධ කර ගත හැකි වේ.

- ශ්‍රිතයේ අවම අගය -2 වේ.
- ශීර්ෂයේ බණ්ඩාංක $(-2, -2)$ වේ.
- සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය $x = -2$ වේ.
- මෙමගින් y අක්ෂය කැපෙන ලක්ෂ්‍යයේ බණ්ඩාංක $(0, 2)$ වේ.

නිදසුන 2

$-2 \leq x \leq 1$ පරාසය තුළ $y = (x-2)^2 - 6$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳිමු.

අදාළ පරාසය තුළ අගය වගුව පහත පරිදි ගොඩනගා ගත හැකි ය.

$y = (x-2)^2 - 6$

$x = -1$ වූ විට $y = (-1-2)^2 - 6$
$= (-3)^2 - 6$
$= 9 - 6$
$= 3$

$x = 0$ වූ විට $y = (0-2)^2 - 6$
$= (-2)^2 - 6$
$= 4 - 6$
$= -2$

$x = 1$ වූ විට $y = (1 - 2)^2 - 6$
$= (-1)^2 - 6$
$= 1 - 6$
$= -5$

$x = 2$ වූ විට $y = (2 - 2)^2 - 6$
$= (0)^2 - 6$
$= 0 - 6$
$= -6$

$x = 3$ වූ විට $y = (3 - 2)^2 - 6$
$= (1)^2 - 6$
$= 1 - 6$
$= -5$

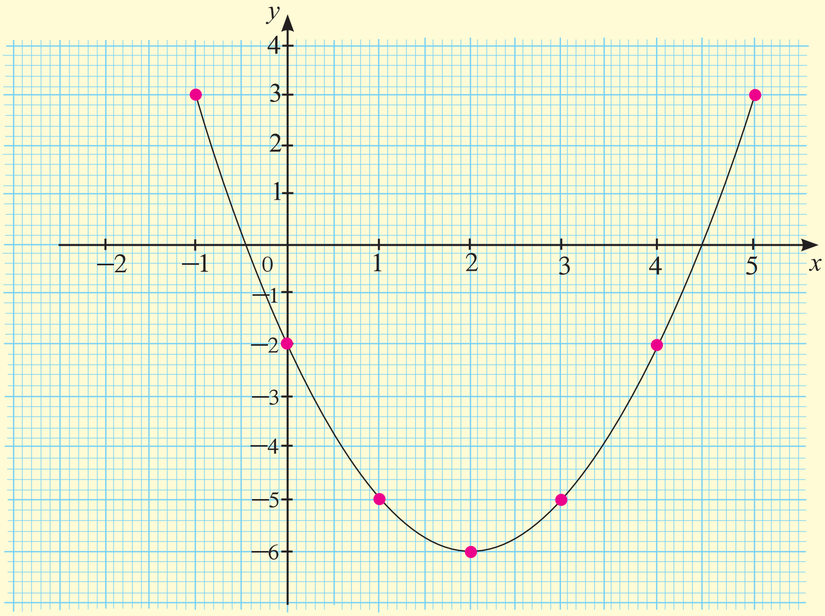
$x = 4$ වූ විට $y = (4 - 2)^2 - 6$
$= (2)^2 - 6$
$= 4 - 6$
$= -2$

$x = 5$ වූ විට $y = (5 - 2)^2 - 6$
$= (3)^2 - 6$
$= 9 - 6$
$= 3$

මෙය තොරතුරු පහත වගුවේ දක්වමු.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	3	-2	-5	-6	-5	-2	3
පටිපාටිගත යුගල ලෙස දැක් වූ විට	$(-1, 3)$	$(0, -2)$	$(1, -5)$	$(2, -6)$	$(3, -5)$	$(4, -2)$	$(5, 3)$

x අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 10කින් ඒකකයක් ද y අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 5කින් ඒකකයක් ද නිරූපණය වන සේ පරිමාණය ගෙන බණ්ඩාංක තලයක එම පටිපාටිගත යුගල ලකුණු කර අඳින ලද ප්‍රස්තාරය පහත දැක්වේ.



ඉහත ප්‍රස්තාරය නිරීක්ෂණය කළ විට පහත කරුණු අවබෝධ කර ගත හැකි වේ.

- ශ්‍රිතයේ අවම අගය -6 වේ.
- ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක $(2, -6)$ වේ.
- සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය $x = 2$ වේ.
- මෙමගින් y අක්ෂය කැපෙන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(0, -2)$ වේ.

ඉහත නිදසුන් දෙක මගින් පහත කරුණු තහවුරු වේ.

එනම්, $y = (x+a)^2 + b$ ආකාරයේ ප්‍රස්තාරයට ඇත්තේ අවමයකි. එම අවම අගය b වේ. ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක $(-a, b)$ වේ. ප්‍රස්තාරයේ සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය $x = -a$ වේ. ප්‍රස්තාරය මගින් y අක්ෂය කැපෙන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(0, a^2 + b)$ වේ.

ඉහත $y = (x + 2)^2 - 2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරයෙහි $a = 2$, $b = -2$ වේ. එමනිසා එහි අවම අගය -2 වේ. එහි ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක $(-2, -2)$ වේ. එහි සමමිති අක්ෂයෙහි සමීකරණය $x = -2$ වේ. මෙමගින් y අක්ෂය කැපෙන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(0, 2^2 + (-2))$ වේ. එනම් $(0, 2)$ වේ.

ඉහත $y = (x - 2)^2 - 6$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරයෙහි $a = -2$, $b = -6$ වේ. එමනිසා එහි අවම අගය -6 වේ. එහි ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක $(2, -6)$ වේ. එහි සමමිති අක්ෂයෙහි සමීකරණය $x = 2$ වේ. මෙමගින් y අක්ෂය කැපෙන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(0, (-2)^2 + (-6))$ වේ. එනම් $(0, -2)$ වේ.

නිදසුන 3

$-2 \leq x \leq 4$ පරාසය තුළ $y = -(x-1)^2 + 1$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳිමු. අදාළ පරාසය තුළ අගය වගුව පහත පරිදි ගොඩනඟා ගත හැකි ය.

$x = -2$ වූ විට $y = -(-2-1)^2 + 1$
$= -(-3)^2 + 1$
$= -9 + 1$
$= -8$

$x = -1$ වූ විට $y = -(-1-1)^2 + 1$
$= -(-2)^2 + 1$
$= -4 + 1$
$= -3$

$x = 0$ වූ විට $y = -(0-1)^2 + 1$
$= -(-1)^2 + 1$
$= -1 + 1$
$= 0$

$x = 1$ වූ විට $y = -(1-1)^2 + 1$
$= -(0)^2 + 1$
$= 0 + 1$
$= 1$

$x = 2$ වූ විට $y = -(2-1)^2 + 1$
$= -(1)^2 + 1$
$= -1 + 1$
$= 0$

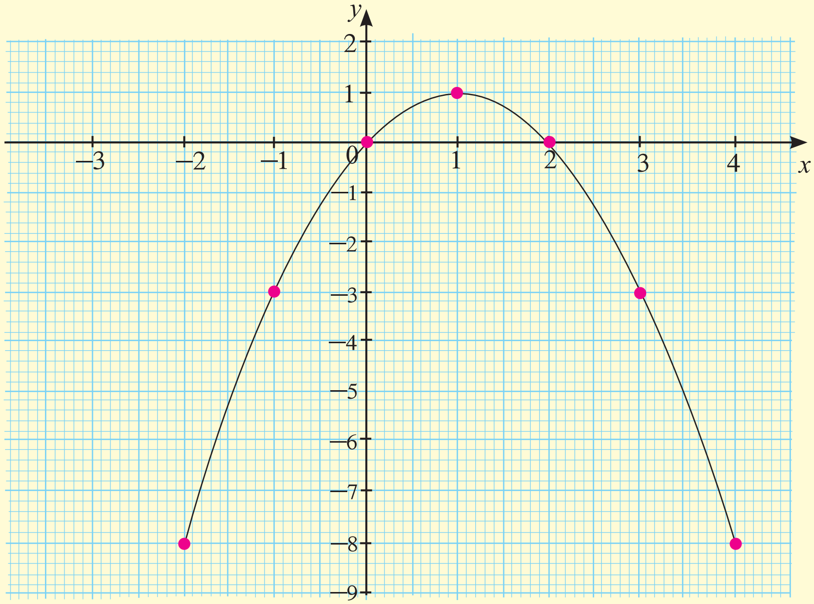
$x = 3$ වූ විට $y = -(3-1)^2 + 1$
$= -(2)^2 + 1$
$= -4 + 1$
$= -3$

$x = 4$ වූ විට $y = -(4-1)^2 + 1$
$= -(3)^2 + 1$
$= -9 + 1$
$= -8$

මෙම තොරතුරු පහත වගුවේ දක්වමු.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	-3	0	1	0	-3	-8
පටිපාටිගත යුගල ලෙස දැක් වූ විට	$(-2, -8)$	$(-1, -3)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 0)$	$(3, -3)$	$(4, -8)$

x අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 10කින් ඒකකයක් ද y අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 5කින් ඒකකයක් ද නිරූපණය වන සේ පරිමාණය ගෙන බණ්ඩාංක තලයක එම පටිපාටිගත යුගල ලකුණු කර අඳින ලද ප්‍රස්තාරය පහත දැක්වේ.



ඉහත ප්‍රස්තාරය නිරීක්ෂණය කළ විට පහත කරුණු අවබෝධ කර ගත හැකි වේ.

- ශ්‍රිතයේ උපරිම අගය $+1$ වේ.
- ශීර්ෂයේ බණ්ඩාංක $(1, 1)$ වේ.
- සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය $x = 1$ වේ.
- මෙමගින් y අක්ෂය කැපෙන ලක්ෂ්‍යයේ බණ්ඩාංක $(0, 0)$ වේ.

නිදසුන 4

$-5 \leq x \leq 1$ පරාසය තුළ $y = -(x+2)^2 + 2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳිමු. අදාළ පරාසය තුළ අගය වගුව පහත පරිදි ගොඩනගා ගත හැකි ය.

$y = -(x+2)^2 + 2$

$x = -5$ වූ විට y
$$= -(x+2)^2 + 2$$
$$= -(-5+2)^2 + 2$$
$$= -(-3)^2 + 2$$
$$= -9 + 2$$
$$= -7$$

$x = -4$ වූ විට y
$$= -(x+2)^2 + 2$$
$$= -(-4+2)^2 + 2$$
$$= -(-2)^2 + 2$$
$$= -4 + 2$$
$$= -2$$

$x = -3$ වූ විට y $= -(x+2)^2 + 2$

$= -(-3+2)^2 + 2$

$= -(-1)^2 + 2$

$= -1 + 2$

$= 1$

$x = -2$ වූ විට y $= -(x+2)^2 + 2$

$= -(-2+2)^2 + 2$

$= 0 + 2$

$= 2$

$x = -1$ වූ විට y $= -(x+2)^2 + 2$

$= -(-1+2)^2 + 2$

$= -(1)^2 + 2$

$= -1 + 2$

$= 1$

$x = 0$ වූ විට y $= -(x+2)^2 + 2$

$= -(0+2)^2 + 2$

$= -(2)^2 + 2$

$= -4 + 2$

$= -2$

$x = 1$ වූ විට y $= -(x+2)^2 + 2$

$= -(1+2)^2 + 2$

$= -(3)^2 + 2$

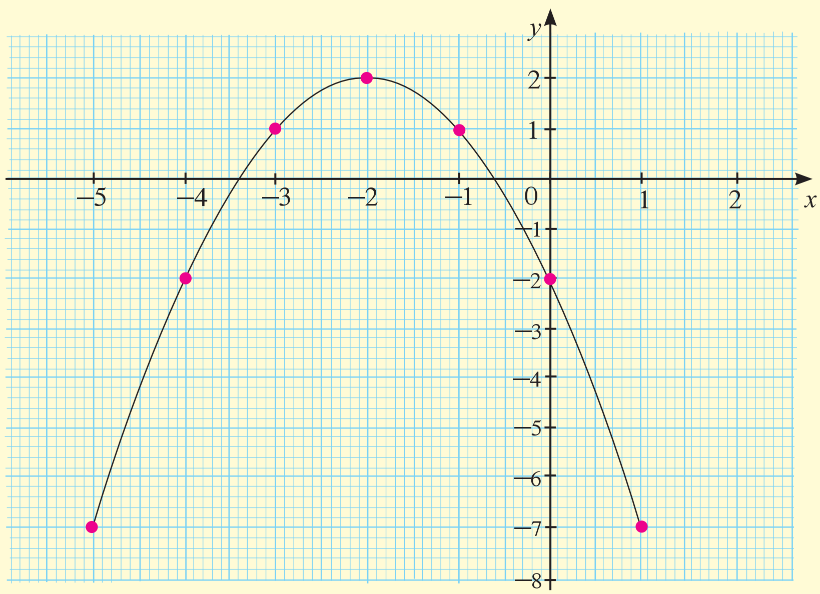
$= -9 + 2$

$= -7$

මෙම තොරතුරු පහත වගුවේ දක්වමු.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	-7	-2	1	2	1	-2	-7
පටිපාටිගත යුගල ලෙස දැක් වූ විට	$(-5, -7)$	$(-4, -2)$	$(-3, 1)$	$(-2, 2)$	$(-1, 1)$	$(0, -2)$	$(1, -7)$

x අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 10කින් ඒකකයක් ද y අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 5කින් ඒකකයක් ද නිරූපණය වන සේ පරිමාණය ගෙන බණ්ඩාංක තලයක එම පටිපාටිගත යුගල ලකුණු කර අඳින ලද ප්‍රස්තාරය පහත දැක්වේ.



ඉහත ප්‍රස්තාරය නිරීක්ෂණය කළ විට පහත කරුණු අවබෝධ කර ගත හැකි වේ.

- ශ්‍රිතයේ උපරිම අගය +2 වේ.
- ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක $(-2,\ 2)$ වේ.
- සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය $x = -2$ වේ.
- මෙමගින් y අක්ෂය කැපෙන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(0,\ -2)$ වේ.

ඉහත නිදසුන් දෙක මගින් පහත කරුණු තහවුරු වේ.

එනම්, $y = -(x+a)^2 + b$ ආකාරයේ ප්‍රස්තාරයට ඇත්තේ උපරිමයකි. එම උපරිම අගය b වේ. ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක $(-a,\ b)$ වේ. ප්‍රස්තාරයේ සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය $x = -a$ වේ. ප්‍රස්තාරය මගින් y අක්ෂය කැපෙන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(0, -a^2+b)$ වේ.

ඉහත $y = -(x-1)^2 + 1$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරයෙහි $a = -1$, $b = 1$ වේ. එමනිසා එහි උපරිම අගය 1 වේ. එහි ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක $(1,\ 1)$ වේ. එහි සමමිති අක්ෂයෙහි සමීකරණය $x = 1$ වේ. මෙමගින් y අක්ෂය කැපෙන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(0,\ -(-1)^2 + 1)$ වේ. එනම් $(0,\ 0)$ වේ.

ඉහත $y = -(x+2)^2 + 2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරයෙහි $a = 2$, $b = 2$ වේ. එමනිසා එහි උපරිම අගය 2 වේ. එහි ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක $(-2,\ 2)$ වේ. එහි සමමිති අක්ෂයෙහි සමීකරණය $x = -2$ වේ. මෙමගින් y අක්ෂය කැපෙන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(0, -(2)^2 + 2)$ වේ. එනම් $(0,\ -2)$ වේ.

12.2 අභ්‍යාසය

1. පහත දී ඇති වගුව පිටපත් කරගෙන සම්පූර්ණ කරන්න.

ශ්‍රිතය	ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය උපරිම ද අවම ද යන බව	උපරිම/ අවම අගය	සමමිති රේඛාවේ සමීකරණය	ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක
$y = (x+1)^2 - 3$	....	....	....	....
$y = 3 - (x-2)^2$	....	....	....	....
$y = 1 - (x - \frac{3}{2})^2$	....	....	....	....
$y = 1\frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2})^2$	....	....	....	....
....	උපරිමයකි.	2	$x = 1$	....
....	අවමයකි.	....	....	$(3,\ 2)$

2. $y = (x-2)^2 - 3$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීමට සකස් කළ x හා y අගය ඇතුළත් අසම්පූර්ණ වගුවක් පහත දැක්වේ.

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	6	1	–2	.....	–2	1	6

(a) (i) හිස්තැන් පුරවන්න.
(ii) සුදුසු පරිමාණයක් භාවිත කර ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

(b) ඔබ ඇඳි ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්,
(i) අවම අගය ලියා දක්වන්න.
(ii) හැරුම් ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක ලියන්න.
(iii) සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණ ලියන්න.
(iv) ශ්‍රිතය ධන වන x හි අගය පරාසය ලියන්න.
(v) ශ්‍රිතය සෘණ වන x හි අගය පරාසය ලියන්න.
(vi) ශ්‍රිතය සෘණව අඩු වන x හි අගය පරාසය ලියන්න.
(vii) $y = 0$ වන විට x හි අගයන් ලියන්න.

3. $y = (x+2)^2 - 3$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීම සඳහා $-5 \leq x \leq 1$ පරාසය තුළ,
(i) සුදුසු අගය වගුවක් ගොඩනගන්න.
(ii) ඛණ්ඩාංක තලයක $y = (x+2)^2 - 3$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.
(iii) අඳින ලද ප්‍රස්තාරය ඇසුරින්,
(a) සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය ලියන්න.
(b) ශ්‍රිතයේ අවම අගය ලියන්න.
(c) අවම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියන්න.

4. $y = 3 - (x-1)^2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීම සඳහා $-2 \leq x \leq 4$ පරාසය තුළ,
(i) සුදුසු අගය වගුවක් ගොඩනගන්න.
(ii) ඛණ්ඩාංක තලයක $y = 3 - (x-1)^2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.
(iii) අඳින ලද ප්‍රස්තාරය ඇසුරින්,
(a) සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය ලියන්න.
(b) ශ්‍රිතයේ උපරිම අගය ලියන්න.
(c) ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක ලියන්න.

13 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය හා එහි විලෝමය අවබෝධ කර ගැනීමට,
- මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය හා විලෝමය භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීමට

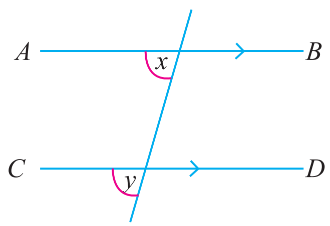
හැකියාව ලැබේ.

පෙර ශ්‍රේණිවල දී ඉගෙන ගත් සමාන්තර රේඛා හා සම්බන්ධ ජ්‍යාමිතික පාඩම් ආවර්ජනය කිරීමට පහත දැක්වෙන පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසවල යෙදෙන්න.

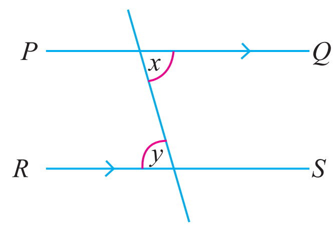
පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් රූපයේ x හා y සමාන වීමට හේතු දක්වන්න.

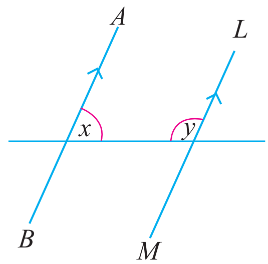
(i)



(ii)

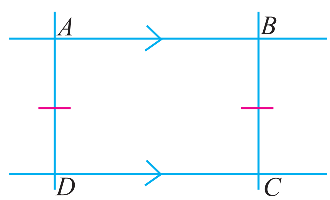


2. පහත දැක්වෙන රූපයේ x හා y කෝණවල ඓක්‍යය 180^{o} ට සමාන වීමට හේතුව දක්වන්න.



3. සමාන්තරාස්‍රයක ඇති ලක්ෂණ මොනවා ද?
4. චතුරස්‍රයක් සමාන්තරාස්‍රයක් වීමට තිබිය යුතු අවශ්‍යතා මොනවා ද?

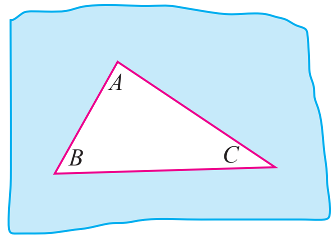
5. පහත රූපයේ දැක්වෙන චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයක් වේද නොවේ ද යන්න හේතු සහිතව සඳහන් කරන්න.



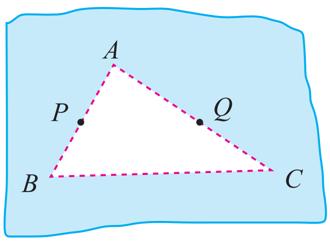
13.1 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය

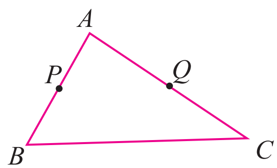
ක්‍රියාකාරකම 1

පියවර 1 - කාඩ්බෝඩ් කැබැල්ලක ඕනෑ ම ත්‍රිකෝණයක් ඇඳ එය ABC ලෙස නම් කරන්න.

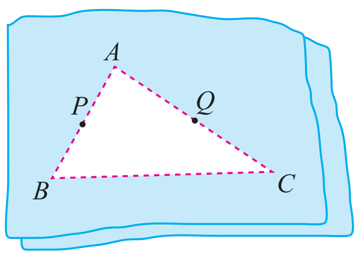


පියවර 2- AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P හා Q ලෙස නම් කර ත්‍රිකෝණය කපා ඉවත් කර ගන්න.

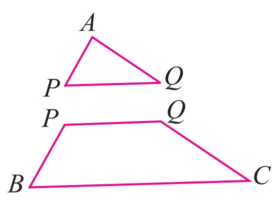




පියවර 3 - ඉතිරි කාඩ්බෝඩ් කැබැල්ල වෙනත් කාඩ්බෝඩ් කැබැල්ලක අලවා P හා Q යා වන සේ රේඛාවක් අඳින්න.



පියවර 4- කපා ඉවත් කළ ත්‍රිකෝණයේ P හා Q යා කර එම රේඛාව දිගේ කපා ගන්න.



පියවර 5 - ඉහත කපා ගත් ත්‍රිකෝණයේ ඉහළ ත්‍රිකෝණයේ PQ පාදය මෙන් කී ගුණයක් BC පාදය තුළ ඇති දැයි බලන්න.

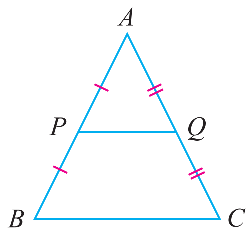
පියවර 6 - PQ පාදය, BC පාදය අතර තවත් සම්බන්ධයක් ඇති දැයි බලන්න.

ඉහත ක්‍රියාකාරකම මගින් ලැබෙන ජ්‍යාමිතික සංකල්පය පහත පරිදි ප්‍රමේයයක් මගින් ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයය

ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාව ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වන අතර දිගින් එම පාදයෙන් හරි අඩක් වේ.

මෙම ප්‍රමේයය මගින් දැක්වෙන අදහස රූප සටහනකින් පහත පරිදි දැක්විය හැකි ය. ABC ත්‍රිකෝණයේ AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P හා Q වේ.



$AP = PB$ සහ $AQ = QC$ බැවින්,

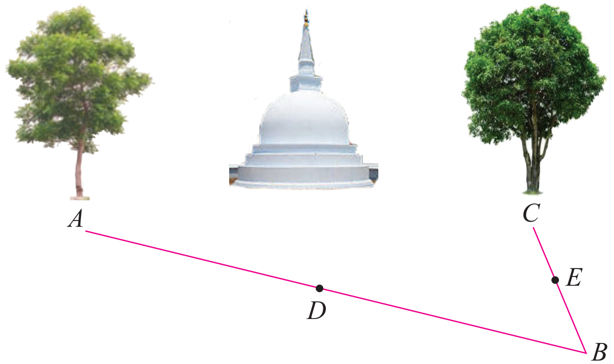
$PQ // BC$ සහ $PQ = \frac{1}{2} BC$ වේ.

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය මගින් ප්‍රායෝගික ජීවිතයේ දී හමුවන ගණනය කිරීම් පවා සිදු කළ හැකි ය.

පහත දැක්වෙන රූපයේ පරිදි පරිසරයේ දී එක එල්ලේ එහා මෙහා යා නොහැකි ස්ථාන දෙකක් අතර දුර සෙවීමට ඇතැයි සිතමු.

මෙම පරිසර පද්ධතියේ ඇති චෛත්‍යය හා ඊට දෙපසින් පිහිටි ගස් දෙකක් අතර දුර සෙවීමට ඇති විට,

AB හා BC ලණු දෙක A හා C කෙළවරවල් ගස් දෙකට ගැට ගසා B ලක්ෂ්‍යයෙන් එකට සිටින සේ අල්ලා ගත යුතු වේ.



AB හා BC ලණුවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් වන D හා E සොයා DE දුර මැන ගන්න.
එවිට DE දුර මෙන් දෙගුණයක් ගස් දෙක අතර පවතී.

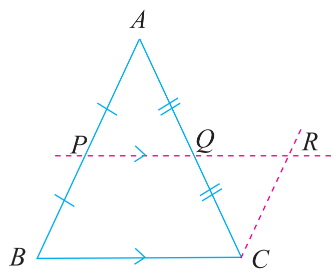
මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් විසඳිය හැකි මෙවැනි පරිසරයේ ඇති ගැටලු සාකච්ඡා කරන්න.

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය විධිමත් සාධනය

දත්තය : ABC ත්‍රිකෝණයේ P සහ Q යනු පිළිවෙළින් AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ.

සාධනය කළ යුත්ත : $PQ//BC$ බව හා $PQ = \frac{1}{2}\ BC$ බව

නිර්මාණය : දික්කළ PQ ට R හි දී හමු වන සේ BP ට සමාන්තරව C හරහා රේඛාවක් අඳිමු.



සාධනය : APQ සහ QCR ත්‍රිකෝණ දෙක සළකමු.

$AQ = QC$ (AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Q බැවින්)

$A\hat{P}Q = Q\hat{R}C$ (ඒකාන්තර කෝණ)

$A\hat{Q}P = R\hat{Q}C$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$APQ\Delta \equiv QCR\Delta$ (කෝ.කෝ.පා. අවස්ථාව)

තව ද අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සමාන කිරීමෙන්,

$AP = RC$ සහ $PQ = QR$

නමුත් $AP = PB$

$\therefore PB = RC$

මේ අනුව, $BCRP$ චතුරස්‍රයේ $PB = RC$ සහ $PB//RC$ වේ.

සම්මුඛ පාද යුගලක් සමාන හා සමාන්තර බැවින්, $BCRP$ සමාන්තරාස්‍රයකි.

එබැවින් $PR//BC$ සහ $PR = BC$ වේ.

තව ද, $PQ = QR$

$\therefore PQ = \frac{1}{2} PR$

තව ද, $PR = BC$ බැවින් $PQ = \frac{1}{2} BC$

නිදසුන 1

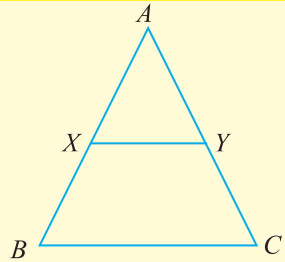
ABC ත්‍රිකෝණයේ AB සහ AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය X හා Y නම් $BC = 20$ cm, $AB = 24$ cm හා $AC = 22$ cm වේ.

(i) BC ට සමාන්තර පාදයක් නම් කරන්න.

(ii) ඉහත (i) ලබා ගැනීම සඳහා භාවිත කළ ප්‍රමේයය ලියා දක්වන්න.

(iii) $A\hat{C}B = 70^{\circ}$ නම් $A\hat{Y}X$ හි අගය සොයන්න.

(iv) $BCYX$ ත්‍රපීසියමේ පරිමිතිය සොයන්න.



(i) XY

(ii) ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාව ත්‍රිකෝණයෙහි ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වේ.

(iii) $A\hat{Y}X = A\hat{C}B = 70^{\circ}$ ($BC//XY$ බැවින් අනුරූප කෝණ සමාන වේ.)

(iv) $BCYX$ ත්‍රපීසියමේ පරිමිතිය $= BX + XY + YC + BC$

$= \frac{1}{2} AB + XY + \frac{1}{2} AC + BC$

$= \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AC + BC$ (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය මගින්)

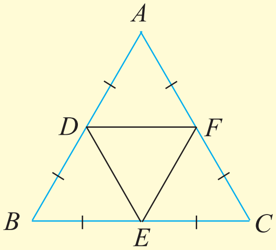
$= \left(\frac{1}{2} \times 24 \text{ cm}\right) + \left(\frac{1}{2} \times 20 \text{ cm}\right) + \left(\frac{1}{2} \times 22 \text{ cm}\right) + 20 \text{ cm}$

$= 12 \text{ cm} + 10 \text{ cm} + 11 \text{ cm} + 20 \text{ cm}$

$= 53 \text{ cm}$

නිදසුන 2

සමපාද ත්‍රිකෝණයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන ත්‍රිකෝණය ද සමපාද ත්‍රිකෝණයක් බව පෙන්වන්න.



ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයකි.
AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වේ.
BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E වේ.
CA පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය F වේ.

ABC ත්‍රිකෝණයේ,

$AD = DB$ වේ. (AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වේ.)
$AF = FC$ වේ. (CA පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය F වේ.)

$DF = \frac{1}{2}\ BC$ — ① (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය අනුව)

$AD = DB$ වේ. (AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වේ.)
$BE = EC$ වේ. (BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E වේ.)

$DE = \frac{1}{2}\ AC$ — ② (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය අනුව)

$BE = EC$ වේ. (BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E වේ.)
$AF = FC$ වේ. (CA පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය F වේ.)

$EF = \frac{1}{2}\ AB$ — ③ (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය අනුව)

තවද, $AB = BC = AC$ (ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් වන බැවින්)

①, ② සහ ③ න්

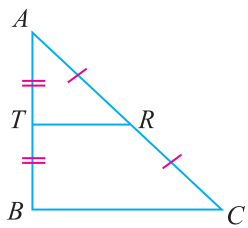
$DF = DE = EF$

එබැවින්, DEF සමපාද ත්‍රිකෝණයක් වේ.

13.1 අභ්‍යාසය

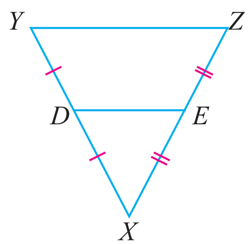
1. වරහන් තුළින් සුදුසු පිළිතුර තෝරා හිස්තැන් පුරවන්න.

(i)



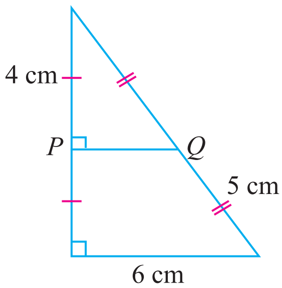
$TR = \frac{1}{2}$ …….. (BC, AR, AC)

(ii)



$DE = \frac{1}{2}$ ……. (XY, XZ, YZ)

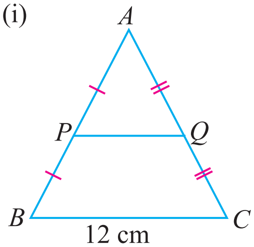
(iii)



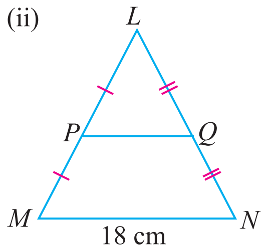
PQ = ……. (4 cm, 3 cm, 5 cm)

2. රූපයේ ඇති දත්ත අනුව PQ හි දිග සොයන්න.

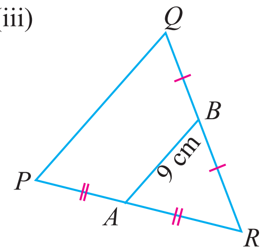
(i)



(ii)

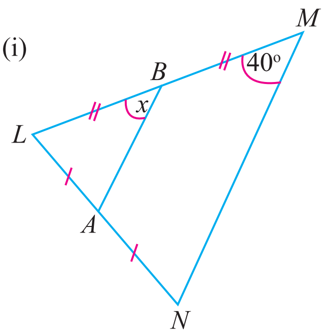


(iii)

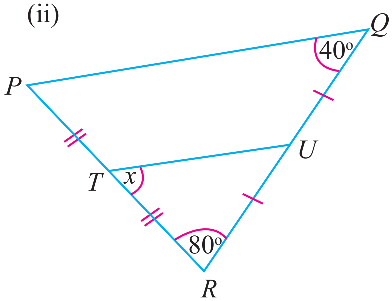


3. රූපයේ ඇති දත්ත අනුව x^{o} හි අගය සොයන්න.

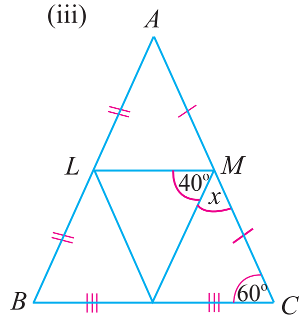
(i)



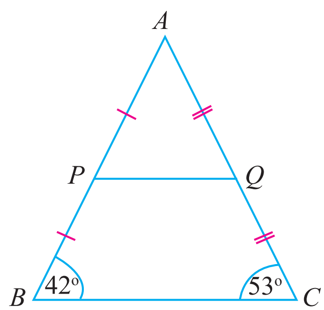
(ii)



(iii)

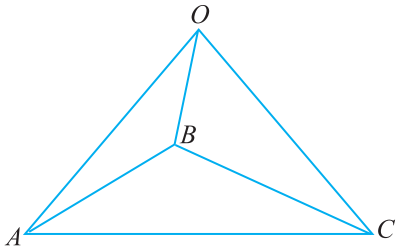


4. ABC ත්‍රිකෝණයේ AB, AC සහ පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය P හා Q නම් $A\hat{P}Q$ සහ $A\hat{Q}P$ සොයන්න.



5. ABC ත්‍රිකෝණයේ BC, CA හා AB පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P, Q සහ R වේ. $PQAR$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

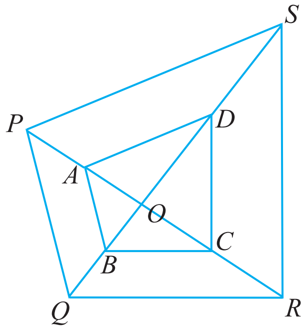
6. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව ABC ත්‍රිකෝණයට පිටතින් O ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇති අතර OA, OB හා OC යා කර ඇත.



(i) OA, OB හා OC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් පිළිවෙළින් G, H හා I වේ. රූපය පිටපත් කර මෙම තොරතුරු එහි ලකුණු කරන්න.

(ii) $A\hat{B}C = G\hat{H}I$ බව පෙන්වන්න.

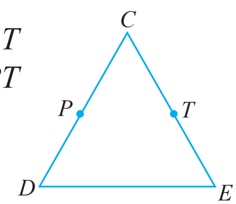
7. $PQRS$ චතුරස්‍රයේ ශීර්ෂ O ලක්ෂ්‍යයට යා කර ඇත. PO, QO, RO හා SO හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් පිළිවෙළින් A, B, C හා D වේ. $PQRS$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය, $ABCD$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය මෙන් දෙගුණයක් බව පෙන්වන්න.



8. (i) ඕනෑ ම චතුරස්‍රයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයක් වන බව සාධනය කරන්න.

(ii) මෙය අවතල චතුරස්‍ර සඳහා සත්‍ය වේද නොවේ ද යන්න හේතු සහිතව පෙන්වන්න.

9. CDE යනු පාදයක දිග 16 cm වන සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. P හා T යනු පිළිවෙළින් CD හා CE පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් වේ. CPT ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.



10. DC, EB සරල රේඛා M හිදී එකිනෙක සමච්ඡේදනය වේ. ED රේඛාව $ED = DA$ වන පරිදි A දක්වා දික්කර ඇත. $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

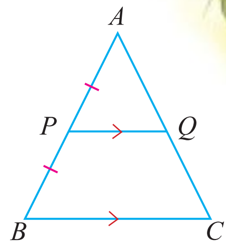
13.2 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමය

දැන් මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයෙහි විලෝමය පිළිබඳව විමසා බලමු.

ප්‍රමේයය

ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තරව අඳින රේඛාවෙන් ඉතිරි පාදය සමච්ඡේදනය වේ.

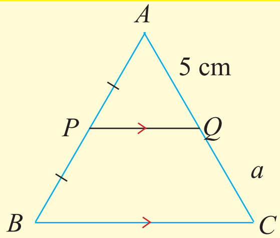
මෙම ප්‍රමේයය මගින් දැක්වෙන අදහස රූප සටහනකින් පහත පරිදි දැක්විය හැකි ය.



ABC ත්‍රිකෝණයේ *AB* පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය *P* වේ.
තවද *PQ*//*BC* වේ.

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමය අනුව, $AQ = QC$

නිදසුන 1

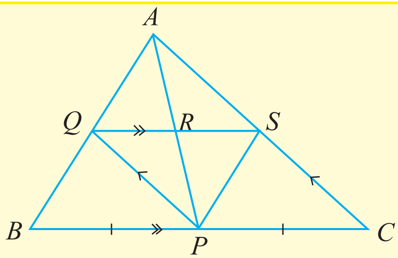


ඉහත රූපයේ *a* මගින් දැක්වෙන දිග සොයන්න.

මෙහි *PQ*, *BC* සමාන්තර වේ.
තව ද, *P* යනු *AB*හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ.

එබැවින්, $a = 5$ cm (ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තරව අඳින රේඛාවෙන් ඉතිරි පාදය සමච්ඡේදනය වන බැවින්)

නිදසුන 2



ඉහත රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරින් $AR = RP$ බව පෙන්වන්න.

$BP = PC$

PQ , *CS* ට සමාන්තර වේ.

$\therefore BQ = AQ$ (ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තරව අඳින රේඛාවෙන් ඉතිරි පාදය සමච්ඡේදනය වන බැවින්)

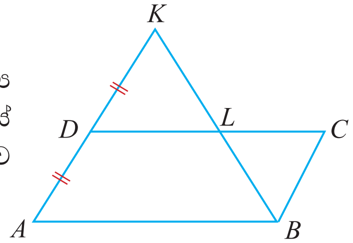
එබැවින් *Q* යනු *AB*හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ.

QR, *BP* ට සමාන්තර වේ.

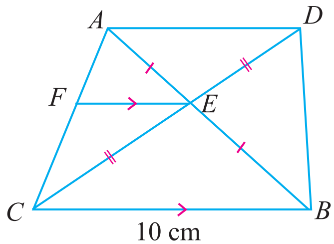
$\therefore AR = RP$ (ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තරව අඳින රේඛාවෙන් ඉතිරි පාදය සමච්ඡේදනය වන බැවින්)

13.2 අභ්‍යාසය

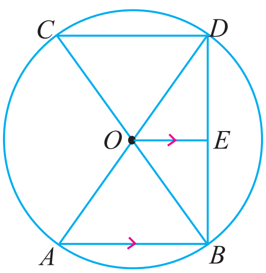
1. $ABCD$ යනු සමාන්තරාස්‍රයකි. D යනු AK හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ. B හා K ලක්ෂ්‍ය යා කර ඇත. රූපයේ පරිදි CD රේඛාව මත L පිහිටයි. $LK = BL$ බව පෙන්වන්න.



2. රූපයේ දැක්වෙන දත්ත අනුව,
   (i) AF හා CF අතර සම්බන්ධයක් ලියන්න.
   (ii) $AD//EF$ බව පෙන්වන්න.
   (iii) AD හා EF අතර ඇති සම්බන්ධය ලියන්න.
   (iv) FE දිග සොයන්න.
   (v) AD දිග සොයන්න.
   (vi) $ACBD$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



3. O කේන්ද්‍රය වන වෘත්තයේ $AB//OE$ වේ. AB හා CD ජ්‍යාය දිගින් සමාන බව පෙන්වන්න.



4. ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වේ. AD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන E හරහා AB රේඛාවට සමාන්තර ලෙස අඳිනු ලබන රේඛාවෙන් AC, BC රේඛා පිළිවෙළින් X හිදී ත් Y හිදී ත් ඡේදනය වේ. $4\,XY = 3\,AB$ බව පෙන්වන්න.

සාරාංශය

- ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාව ත්‍රිකෝණයෙහි ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වන අතර දිගින් එම පාදයෙන් හරි අඩක් වේ.
- ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තරව අඳින රේඛාවෙන් ඉතිරි පාදය සමච්ඡේදනය වේ.

14 ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,

- ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත වන සයිනය, කෝසයිනය සහ ටැංජනය හඳුනා ගැනීමට,
- සයින, කෝසයින හා ටැංජන වගු භාවිත කර ත්‍රිකෝණ ආශ්‍රිත ගණනය කිරීම් සිදු කිරීමට,
- පරිසරය ආශ්‍රිත විවිධ ගණනය කිරීම් සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත යොදා ගැනීමට හැකියාව ලැබේ.

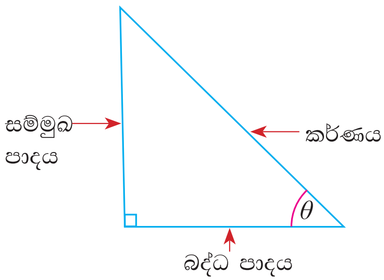
14.1 හැඳින්වීම

ත්‍රිකෝණමිතිය යන වචනය 'ත්‍රිකෝණය' සහ 'මැනීම' යන ග්‍රීක වචන බිඳීමෙන් සෑදී ඇතැයි සැලකේ. මෙහි දී සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ ආධාර කරගෙන සියලුම ගණනය කිරීම් සිදු කරයි. තාරකා විද්‍යාව, මැනුම් ශිල්පය, ඉංජිනේරු විද්‍යාව, භෞතික විද්‍යාව, තරංග චලිතය, නාවික කටයුතු, ගුවන් කටයුතු ආදී ක්ෂේත්‍ර ගණනාවක් පුරා මෙය පැතිරී ඇත.

අපට සරල උපකරණ භාවිත කර ත්‍රිකෝණමිතිය යොදා ගනිමින් පහසුවෙන් ළඟාවීමට නොහැකි ප්‍රායෝගිකව මැනීම් සිදු කළ නොහැකි ස්ථානවලට ඇති දුර, උස ආදිය සරලව ගණනය කර ගැනීමට හැකි ය. කන්දක උස, කුළුණක උස, ගංගාවක පළල, ඈත අහසේ ගමන් කරන ගුවන් යානයකට පොළව මට්ටමේ සිට ඇති උස, ඈත මුහුදේ ඇති වස්තුවකට ඇති දුර ආදිය ඉන් සමහරකි.

සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් සඳහා පයිතගරස් ප්‍රමේයය යොදන ආකාරය ඔබ මීට පෙර උගෙන ගෙන ඇත. පාද දෙකක දිග දන්නා විට ඉතිරි පාදයේ දිග එමගින් ගණනය කර ගත හැකි ය. නමුත් ත්‍රිකෝණයේ සුළු කෝණයක විශාලත්වය සහ එක පාදයක දිග දන්නා විට ඉතිරි පාදවල දිග ගණනය කර ගැනීමට එමගින් නොහැකි ය. සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් සඳහා ත්‍රිකෝණමිතිය ඇසුරෙන් පයිතගරස් ප්‍රමේයයට වඩා වැඩි ගණනය කිරීම් ප්‍රමාණයක් කළ හැකි ය.

සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක සෘජුකෝණයට ඉදිරියෙන් ඇති පාදය කර්ණය ලෙස හඳුන්වන බව ඔබ දැනටමත් දනී. ඉතිරි පාද දෙක හැඳින්වීම එක් සුළු කෝණයකට අනුරූප ව සිදු කරනු ලබයි.



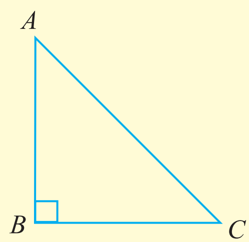
සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ එක සුළු කෝණයක් θ ලෙස සලකමු. එය ඇසුරෙන් ත්‍රිකෝණයේ පාද හඳුන්වමු.

- සෘජුකෝණයට ඉදිරියෙන් ඇති පාදය කර්ණය ලෙස හැඳින්වේ.
- සලකනු ලබන θ කෝණයට ඉදිරියෙන් ඇති පාදය සම්මුඛ පාදය ලෙස හැඳින්වේ.
- සලකනු ලබන θ කෝණයට සම්බන්ධ වී ඇති කර්ණය හැර අනික් පාදය බද්ධ පාදය ලෙස හැඳින්වේ.

θ කෝණය හැර අනික් සුළු කෝණය සැලකීමේ දී, සම්මුඛ පාදය සහ බද්ධ පාදය එකිනෙක මාරුවන බව ත්‍රිකෝණය නිරීක්ෂණය කිරීමෙන් ඔබට පැහැදිලි වේ.

නිදසුන 1

රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ
(i) $B\hat{A}C$ කෝණය
(ii) $A\hat{C}B$ කෝණය
සැලකීමෙන් එහි පාද නම් කරන්න.



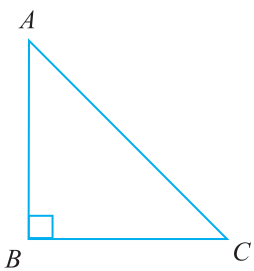
මෙහි කර්ණය $= AC$

(i) $B\hat{A}C$ කෝණය සැළකූ විට,
සම්මුඛ පාදය $= BC$
බද්ධ පාදය $= AB$

(ii) $A\hat{C}B$ කෝණය සැළකූ විට,
සම්මුඛ පාදය $= AB$
බද්ධ පාදය $= BC$

14.1 අභ්‍යාසය

1.

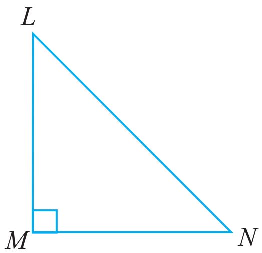


(*a*) මෙම ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය නම් කරන්න.

(*b*) මෙහි $B\hat{A}C$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

(*c*) මෙහි $A\hat{C}B$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

2.

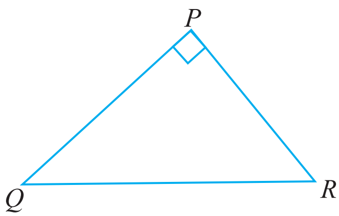


(*a*) මෙම ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය නම් කරන්න.

(*b*) මෙහි $M\hat{N}L$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

(*c*) මෙහි $M\hat{L}N$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

3.

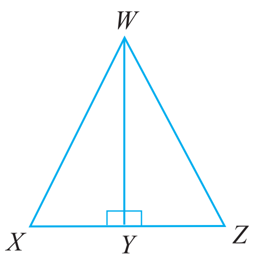


(*a*) මෙම ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය නම් කරන්න.

(*b*) මෙහි $P\hat{Q}R$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

(*c*) මෙහි $P\hat{R}Q$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

4.



(*a*) මෙම රූපයේ කර්ණයන් නම් කරන්න.

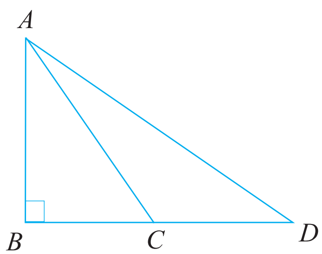
(*b*) මෙහි $W\hat{X}Y$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

(*c*) මෙහි $X\hat{W}Y$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

(*d*) මෙහි $W\hat{Z}Y$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

(*e*) මෙහි $Y\hat{W}Z$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

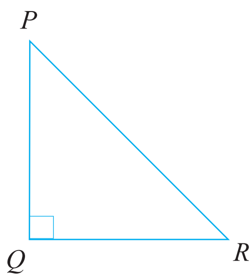
5.



(i) මෙම ත්‍රිකෝණය ආශ්‍රිතව පවතින කර්ණයන් දෙකක් ලියා දක්වන්න.

(ii) මෙහි සම්මුඛ පාදය AB වන, කෝණ දෙකක් ලියා දක්වන්න.

6.



(i) සම්මුඛ පාදය PQ වන කෝණය ලියා දක්වන්න.

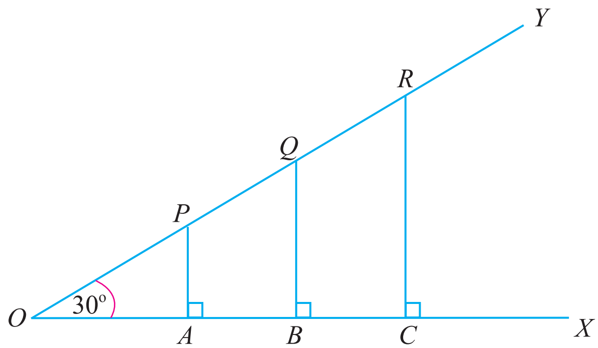
(ii) බද්ධ පාදය PQ වන කෝණය ලියා දක්වන්න.

14.2 ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත

එකම විශාලත්වයක් ඇති කෝණයක් සඳහා විවිධ වූ සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණවල පාද අතර සම්බන්ධතාව විමසා බැලීමට පහත ක්‍රියාකාරකමේ නියැලෙන්න.

ක්‍රියාකාරකම 1

- OX සහ OY බාහු 10 cm වන සේ 30° ක් විශාල වූ XOY කෝණය අඳින්න.
- OX පාදය ඔස්සේ O සිට 3 cm, 5 cm, 8 cm දුරින් පිළිවෙළින් A, B, C ලක්ෂ්‍ය ලකුණු කරන්න.
- විහිත චතුරස්‍රය භාවිතයෙන් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් A, B හා C ලක්ෂ්‍යවල සිට ලම්බක නිර්මාණය කරන්න. ඒවා OY රේඛාව හමුවන ලක්ෂ්‍ය P, Q හා R ලෙස නම් කරන්න.
- එවිට පහත ආකාරයේ රූපයක් ඔබට ලැබෙනු ඇත.



- එක් එක් සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ පාදවල දිග මැන පහත වගුව සම්පූර්ණ කරන්න. (සියලුම මිනුම් සහ ගණනය කිරීම් පළමු දශමස්ථානයට ගන්න.)

සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය	කර්ණය (cm)	සම්මුඛ පාදය (cm)	බද්ධ පාදය (cm)	$\frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}}$	$\frac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}}$	$\frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{බද්ධ පාදය}}$
OAP	3.5	1.8	3	$\frac{1.8}{3.5} = 0.5$	$\frac{3}{3.5} = 0.9$	$\frac{1.8}{3} = 0.6$
OBQ	....	....	....	....	....	....
OCR	....	....	....	....	....	....

එකම විශාලත්වයක් ඇති කෝණයක් සඳහා විවිධ විශාලත්වවලින් යුත් සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණවල නිශ්චිත පාද දෙකක් අතර අනුපාතය නියත අගයක් වන බව ඉහත ක්‍රියාකාරකම අනුව පැහැදිලි ය. එසේ නියත වීමට හේතුව එම ත්‍රිකෝණ සමකෝණී ත්‍රිකෝණ වීමයි. ඒ බව රූප සටහන හොඳින් නිරීක්ෂණය කළ විට පැහැදිලි වේ.

එකම කෝණයක් සඳහා ත්‍රිකෝණවල පාද අතර නියත වන මෙම අනුපාත සඳහා විශේෂිත නම් තුනක් භාවිත වේ.

$\dfrac{\text{සම්මුඛ පාදයේ දිග}}{\text{කර්ණයේ දිග}}$ යන අනුපාතය කෝණයේ සයිනය ලෙස හඳුන්වයි.

$\dfrac{\text{බද්ධ පාදයේ දිග}}{\text{කර්ණයේ දිග}}$ යන අනුපාතය කෝණයේ කෝසයිනය ලෙස හඳුන්වයි.

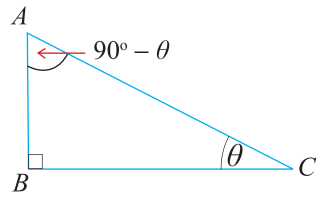
$\dfrac{\text{සම්මුඛ පාදයේ දිග}}{\text{බද්ධ පාදයේ දිග}}$ යන අනුපාතය කෝණයේ ටැංජනය ලෙස හඳුන්වයි.

සයින අනුපාතය දැක්වීමට sin ද කෝසයින අනුපාතය දැක්වීමට cos ද ටැංජන අනුපාතය දැක්වීමට tan ද යන සංකේත භාවිත වේ.

$$\sin\theta = \frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}}, \quad \cos\theta = \frac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}}, \quad \tan\theta = \frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{බද්ධ පාදය}}$$

(මෙහිදී සම්මුඛ පාදයේ දිග, බද්ධ පාදයේ දිග, කර්ණයේ දිග පිළිවෙළින් සම්මුඛ පාදය, බද්ධ පාදය, කර්ණය ලෙස සඳහන් කර ඇත.)

- පහත දැක්වෙන සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ θ කෝණයට අදාළ ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ලියමු.



$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}, \quad \cos\theta = \frac{BC}{AC}, \quad \tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

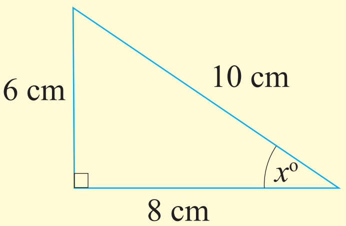
$A\hat{C}B = \theta$ නිසා $B\hat{A}C = 90 - \theta$ වේ.

$$\sin(90^{\circ} - \theta) = \frac{BC}{AC}$$

$\cos\theta = \dfrac{BC}{AC}$ වන බැවින්, $\therefore \cos\theta = \sin(90^{\circ} - \theta)$

නිදසුන 1

පහත දැක්වෙන සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ sin x^o , cos x^o සහ tan x^o අනුපාත ලියා දක්වන්න.



$\sin x^o = \frac{6 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = \frac{6}{10}$

$\cos x^o = \frac{8 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = \frac{8}{10}$

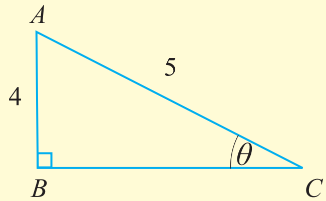
$\tan x^o = \frac{6 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = \frac{6}{8}$

නිදසුන 2

$\sin \theta = \frac{4}{5}$ නම්, cos θ සහ tan θ සොයන්න.

$\sin \theta = \frac{4}{5}$ යන්නෙහි අදහස වන්නේ θහි සම්මුඛ පාදය ඒකක 4ක් ද කර්ණය ඒකක 5ක් ද වන බවයි. මෙම තොරතුරු රූප සටහනක දක්වමු. ත්‍රිකෝණය ABC ලෙස නම් කරමු.

පයිතගරස් සම්බන්ධය ඇසුරෙන් බද්ධ පාදය වන BC හි දිග සොයමු.



$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$5^2 = 4^2 + BC^2$

$25 = 16 + BC^2$

$25 - 16 = BC^2$

$9 = BC^2$

$3 = BC$

$BC = 3$

බද්ධ පාදයේ දිග ඒකක 3ක් වේ.

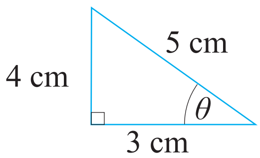
$\cos \theta = \frac{BC}{AC}$ $\qquad$ $\tan \theta = \frac{AB}{BC}$

$\cos \theta = \frac{3}{5} = 0.6$ $\qquad$ $\tan \theta = \frac{4}{3} = 1.33$

14.2 අභ්‍යාසය

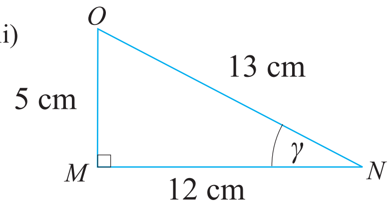
1. පහත දී ඇති එක් එක් ත්‍රිකෝණවල දත්තයන්ට අනුව අසා ඇති ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු ලියා දක්වන්න.

(i)



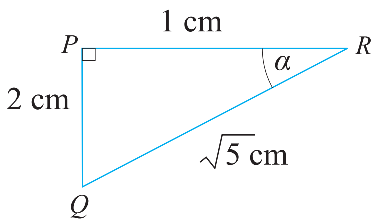
sin θ , cos θ සහ tan θ සොයන්න.

(ii)



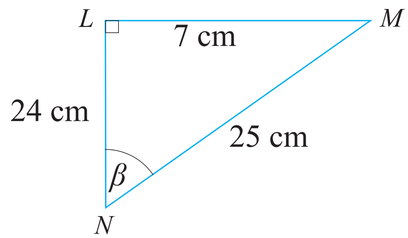
sin γ , cos γ සහ tan γ සොයන්න.

(iii)



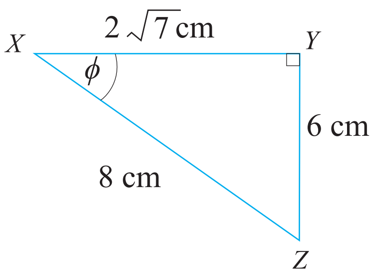
sin α, cos α සහ tan α සොයන්න.

(iv)



sin β, cos β සහ tan β සොයන්න.

(v)



sin ϕ, cos ϕ සහ tan ϕ සොයන්න.

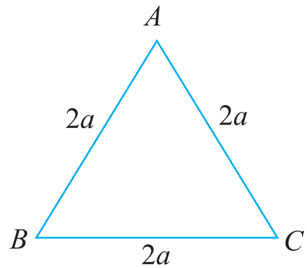
2. $\tan\theta = \frac{3}{4}$ නම් sin θ සහ cos θ සොයන්න.

3. $\sin\beta = \frac{12}{13}$ නම් cos β සහ tan β සොයන්න.

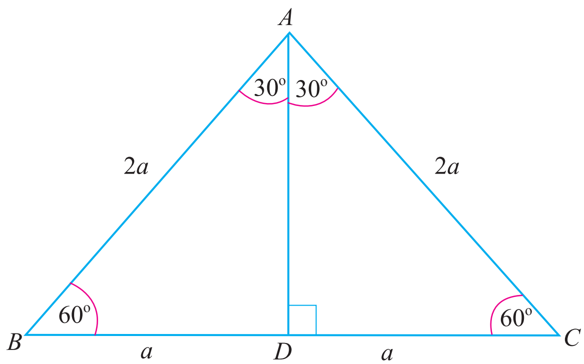
14.3 $30^o, 45^o$ හා 60^o කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත

30^o සහ 60^o කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත සෙවීම

පාදයක දිග $2a$ වන සමපාද ත්‍රිකෝණයක් ඇසුරෙන් 30^o සහ 60^o කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ලබා ගනිමු.



රූපයේ දැක්වෙන්නේ ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. එහි ශීර්ෂ ඇතුළත් සියලුම කෝණ 60^o බැගින් වේ. $\hat{A}$ කෝණයේ සමච්ඡේදකය ඇඳි විට එය BC පාදයේ ලම්බ සමච්ඡේදකය වන බව අපි දනිමු. BC පාදය හමුවන ලක්ෂ්‍යය D යැයි ගනිමු. එවිට එය පහත ආකාරයට දැක්විය හැකි ය.



* ABD ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් සම්බන්ධය යොදා AD පාදයේ දිග ගණනය කරන්න.
* AD පාදයේ දිග දන්නා නිසා ABD ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සලකා පහත ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ගණනය කරන්න.

$\sin 30^o$, $\cos 30^o$, $\tan 30^o$, $\sin 60^o$, $\cos 60^o$, $\tan 60^o$

* ඔබට ලැබුණු අගයන් පහත සඳහන් අගයන් ම දැයි පරීක්ෂා කරන්න.

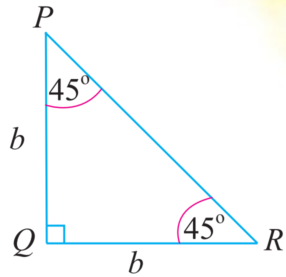
$\sin 30^o = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\cos 60^o = \frac{1}{2}$

$\tan 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\tan 60^o = \sqrt{3}$

45° කෝණයේ ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත සෙවීම

සෘජුකෝණය අන්තර්ගත වන පාදයක දිග b වන සමද්විපාද සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක අඩංගු 45° කෝණය සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ලබා ගනිමු.



මෙය සමද්විපාද සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් නිසා $\hat{P} = \hat{R} = 45^\circ$ වේ.

* මෙම ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යොදා PR පාදයේ දිග ගණනය කරමු.

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

$$= b^2 + b^2$$

$$PR^2 = 2b^2$$

$$PR = \sqrt{2b^2}$$

$$= \sqrt{2}\, b$$

$$\therefore \sin 45^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{\cancel{b}}{\sqrt{2}\cancel{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

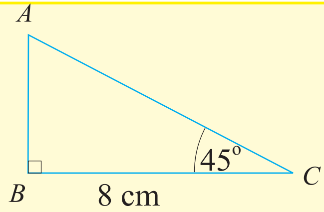
$$\text{Cos } 45^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{\cancel{b}}{\sqrt{2}\cancel{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{PQ}{QR} = \frac{b}{b} = 1$$

සටහන

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

නිදසුන 1



ABC ත්‍රිකෝණයේ AC පාදයේ දිග සොයන්න.

$$\cos 45^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{8\text{ cm}}{AC}$$

$$AC = 8\sqrt{2}\text{ cm}$$

$\sqrt{2} = 1.4$ ආදේශයෙන්

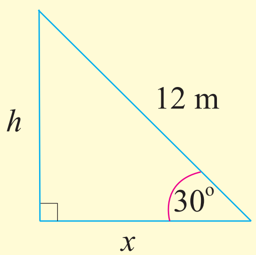
$$AC = 8 \times 1.4\text{ cm} = 11.2\text{ cm}$$

නිදසුන 2

ඍජු කණුවක මුදුනට ගැට ගැසූ කම්බියක්, කණුව පාමුල තිරස් පොළව මත ස්ථානයකට ඇද ගැට ගසා ඇත. කම්බිය ඇදී ඇති කොටසේ දිග 12 m වේ. කම්බිය සහ පොළව අතර කෝණය 30° කි.

(i) මෙම තොරතුරු දැක්වීමට රූප සටහනක් අඳින්න.
(ii) කණුවේ උස සොයන්න.
(iii) කණුවේ පාමුල සිට කොපමණ දුරකින් කම්බිය පොළව මත ගැට ගසා තිබේ ද?

(i)



(ii) කණුවේ උස h යැයි ද ගැට ගැසූ තැනට දුර x යැයි ගනිමු.

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{12\text{ m}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{12\text{ m}}$$

$$\frac{1}{2} \times 12\text{ m} = h$$

$$6\text{ m} = h$$

කණුවේ උස 6 m වේ.

(iii) $\cos 30^\circ = \dfrac{x}{12\text{ m}}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x}{12\text{ m}}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 12\text{ m} = x$

$6\sqrt{3}\text{ m} = x$

$\sqrt{3} = 1.7$ ආදේශ කළ විට

$x = 6 \times 1.7\text{ m} = 10.2\text{ m}$

කණුව පාමුල සිට 10.2 m ඈතින් කම්බිය ගැට ගසා ඇත.

නිදසුන 3

$\sin 30^\circ + \cos 30^\circ$ හි අගය සොයන්න.

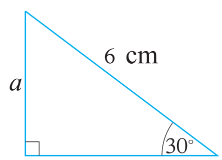
$\sin 30^\circ + \cos 30^\circ = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$

$= 1$

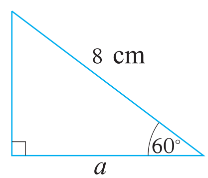
14.3 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන ත්‍රිකෝණවල දී ඇති දත්තයන්ට අනුව *a* වලින් දැක්වෙන පාදවල දිග සොයන්න.

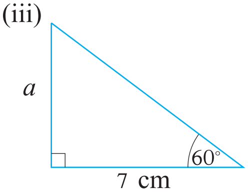
(i)



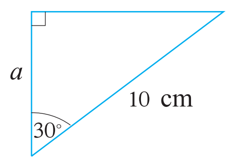
(ii)



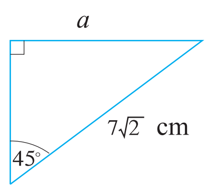
(iii)



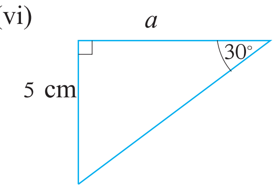
(iv)



(v)

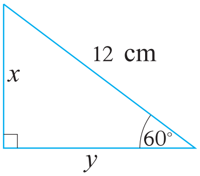


(vi)

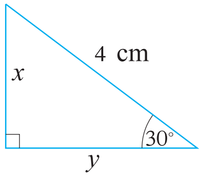


2. පහත ත්‍රිකෝණවල x සහ y මගින් දැක්වෙන පාදවල දිග සොයන්න.

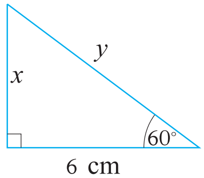
(i)



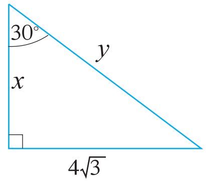
(ii)



(iii)



(iv)



3. අගය සොයන්න.

(i) $\sin 45^{\circ} + \cos 45^{\circ}$ (ii) $\sin 30^{\circ} + \cos 60^{\circ}$ (iii) $\tan 45^{\circ} - \cos 60^{\circ}$

14.4 ත්‍රිකෝණමිතික වගු

අප මෙතෙක් ගණනය කිරීම් සිදු කරන ලද්දේ 30°, 45°, 60° යන කෝණ සඳහා පමණි. නමුත් සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක සුළු කෝණයක් 0° – 90° අතර අගය පරාසයක් පුරා පැතිරී තිබිය හැකි ය. ගණනය කිරීම් ඉතා නිවැරදි ව සිදු කර ගැනීමට හැකි වන ආකාරයට ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත තුන සඳහා වගු තුනක් පිළියෙල කර තිබේ. ත්‍රිකෝණමිතික වගුවලින් උපුටා ගත් කොටස් කිහිපයක් පහත දැක්වේ.

ටැංජන වගුව

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்கன்கள்
NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
25	0.4663	0.4699	0.4734	0.4770	0.4806	0.4841	0.4877	64	4	7	11	14	18	21	25	29	32
26	.4877	.4913	.4950	.4986	.5022	.5059	.5095	63	4	7	11	15	18	22	25	29	33
27	.5095	.5132	.5169	.5206	.5243	.5280	.5317	62	4	7	11	15	18	22	26	30	33
28	.5317	.5354	.5392	.5430	.5467	.5505	.5543	61	4	8	11	15	19	23	26	30	34
29	.5543	.5581	.5619	.5658	.5696	.5735	.5774	60	4	8	12	15	19	23	27	31	35
30	0.5774	0.5812	0.5851	0.5890	0.5930	0.5969	0.6009	59	4	8	12	16	20	24	27	31	35
31	.6009	.6048	.6088	.6128	.6168	.6208	.6249	58	4	8	12	16	20	24	28	32	36
32	.6249	.6289	.6330	.6371	.6412	.6453	.6494	57	4	8	12	16	20	25	29	33	37
33	.6494	.6536	.6577	.6619	.6661	.6703	.6745	56	4	8	13	17	21	25	29	33	38
34	.6745	.6787	.6830	.6873	.6916	.6959	.7002	55	4	9	13	17	21	26	30	34	39
35	0.7002	0.7046	0.7089	0.7133	0.7177	0.7221	0.7265	54	4	9	13	18	22	26	31	35	40
36	.7265	.7310	.7355	.7400	.7445	.7490	.7536	53	5	9	14	18	23	27	32	36	41

සයින වගුව

ප්‍රකෘති සයින
இயற்கைச் சைன்கள்
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
45°	0.7071	0.7092	0.7112	0.7133	0.7153	0.7173	0.7193	44°	2	4	6	8	10	12	14	16	18
46	.7193	.7214	.7234	.7254	.7274	.7294	.7314	43	2	4	6	8	10	12	14	16	18
47	.7314	.7333	.7353	.7373	.7392	.7412	.7431	42	2	4	6	8	10	12	14	16	18
48	.7431	.7451	.7470	.7490	.7509	.7528	.7547	41	2	4	6	8	10	12	13	15	17
49	.7547	.7566	.7585	.7604	.7623	.7642	.7660	40°	2	4	6	8	9	11	13	15	17
50°	0.7660	0.7679	0.7698	0.7716	0.7735	0.7753	0.7771	39	2	4	6	7	9	11	13	15	17
51	.7771	.7790	.7808	.7826	.7844	.7862	.7880	38	2	4	5	7	9	11	13	14	16
52	.7880	.7898	.7916	.7934	.7951	.7969	.7986	37	2	4	5	7	9	11	12	14	16
53	.7986	.8004	.8021	.8039	.8056	.8073	.8090	36	2	3	5	7	9	10	12	14	16
54	.8090	.8107	.8124	.8141	.8158	.8175	.8192	35	2	3	5	7	8	10	12	14	15
55	0.8192	0.8208	0.8225	0.8241	0.8258	0.8274	0.8290	34	2	3	5	7	8	10	12	13	15
56	.8290	.8307	.8323	.8339	.8355	.8371	.8387	33	2	3	5	6	8	10	11	13	14

කොසයින වගුව

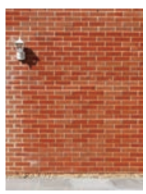
73	.9563	.9572	.9580	.9588	.9596	.9605	.9613	16	1	2	2	3	4	5	6	7	7
74	.9613	.9621	.9628	.9636	.9644	.9652	.9659	15	1	2	2	3	4	5	5	6	7
75	0.9659	0.9667	0.9674	0.9681	0.9689	0.9696	0.9703	14	1	1	2	3	4	4	5	6	7
76	.9703	.9710	.9717	.9724	.9730	.9737	.9744	13	1	1	2	3	3	4	5	5	6
77	.9744	.9750	.9757	.9763	.9769	.9775	.9781	12	1	1	2	3	3	4	4	5	6
78	.9781	.9787	.9793	.9799	.9805	.9811	.9816	11	1	1	2	2	3	3	4	5	5
79	.9816	.9822	.9827	.9833	.9838	.9843	.9848	10°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80°	0.9848	0.9853	0.9858	0.9863	0.9868	0.9872	0.9877	9	0	1	1	2	2	3	3	4	4
81	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	8	0	1	1	2	2	3	3	3	4
82	.9903	.9907	.9911	.9914	.9918	.9922	.9925	7	0	1	1	2	2	2	3	3	3
83	.9925	.9929	.9932	.9936	.9939	.9942	.9945	6	0	1	1	1	2	2	2	3	3
84	.9945	.9948	.9951	.9954	.9957	.9959	.9962	5	0	1	1	1	1	2	2	2	3
85	0.9962	0.9964	0.9967	0.9969	0.9971	0.9974	0.9976	4	0	1	1	1	1	1	2	2	2
86	.9976	.9978	.9980	.9981	.9983	.9985	.9986	3	0	0	1	1	1	1	1	1	2
87	.9986	.9988	.9989	.9990	.9992	.9993	.9994	2	0	0	0	1	1	1	1	1	1
88	.9994	.9995	.9996	.9997	.9997	.9998	.9998	1									
89	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0°									
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝසයින
இயற்கைக் கோசைன்கள்
NATURAL COSINES

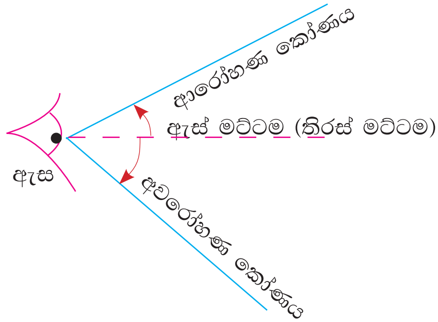
ඉහත වගු ඇසුරින් ද 30°, 45°, 60° කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ලබා ගෙන ගණනය කිරීම් සිදු කළ හැකි ය.

14.5 සිරස් තලයේ කෝණ

පොළොවේ සිට ඍජු ව ඉහළට විහිදෙන තලය සිරස් තලයයි. කුළුණක්, දොරක්, ගොඩනැගිල්ලක බිත්තියක් පොළොවට ලම්බක වන නිසා ඒවා සිරස් තලයේ පිහිටීම් සඳහා උදාහරණ වේ.



සිරස් තලය සමග සම්බන්ධ වන්නේ ආරෝහණ සහ අවරෝහණ කෝණයන් ය. එම කෝණ සම්බන්ධ වන ගණනය කිරීම් පරිමාණ රූප ඇසුරෙන් 3 ශ්‍රේණියේ දී ඔබ සිදු කරන ලදී. ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත සම්බන්ධ කර ගෙන ගණනය කිරීම් සිදු කරන ආකාරය පිළිබඳ ව දැන් සලකා බලමු.

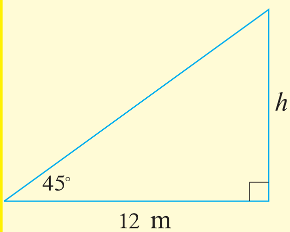


- ඇස් මට්ටමේ සිට ඉහළට මනිනු ලබන කෝණය ආරෝහණ කෝණය වේ.
- ඇස් මට්ටමේ සිට පහළට මනිනු ලබන කෝණය අවරෝහණ කෝණය වේ.

නිදසුන 1

සංඥාධාර කුළුණක පාමුල සිට 12 mක් දුරින් සමබිමේ පිහිටි A ලක්ෂ්‍යයේ දී කුළුණ මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය 45° ක් ලෙස දිස් වේ. මෙම තොරතුරු රූප සටහනක දක්වා සංඥාධාර කුළුණේ උස සොයන්න.

කුළුණේ උස h යැයි ගනිමු.



$$\tan 45^\circ = \frac{h}{12\ \text{m}}$$

$$1 = \frac{h}{12\ \text{m}}$$

$$1 \times 12\ \text{m} = h$$

$$12\ \text{m} = h$$

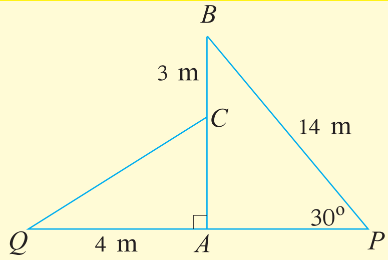
සංඥාධාර කුළුණේ උස 12 m වේ.

නිදසුන 2

AB නම් කණුවක මුදුනට ගැට ගැසූ 14 m දිග කම්බියක් 30° ආරෝහණ කෝණයක් සෑදෙන ආකාරයට ඇදී සිටින සේ පොළොව මත පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයට සවි කර ඇත. කණුව මුදුනේ සිට 3 mක් පහළ C ලක්ෂ්‍යයට ගැට ගැසූ තවත් කම්බියක් කණුව පාමුල සිට 4 mක් ඈතින් Pට විරුද්ධ දිශාවේ පිහිටි Q ස්ථානයට ඇද සවි කර ඇත. P, Q සහ කණුව එකම රේඛාවක පිහිටා ඇත.

(i) ඉහත තොරතුරු දැක්වෙන රූපයක් අඳින්න.
(ii) කණුවේ උස සොයන්න.
(iii) Q ස්ථානයේ ගැට ගැසූ කම්බිය පොළොව සමඟ සාදන කෝණය සොයන්න.

(i)



(ii) කණුවේ උස සෙවීමට ABP සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින අනුපාතය ලියමු.

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{BP}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{AB}{14\text{ m}}$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{14}^{7}\text{ m} = AB$$

$$7\text{ m} = AB$$

කණුවේ උස 7 mකි.

(iii) Q ස්ථානයේ දී පොළොව සමග සාදන කෝණය සෙවීමට ACQ සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සඳහා ටැංජන අනුපාතය සලකමු.

$$AC = 7\text{ m} - 3\text{ m}$$

$$= 4\text{ m}$$

$$\tan C\hat{Q}A = \frac{AC}{AQ}$$

$$= \frac{4\text{ m}}{4\text{ m}}$$

$$\tan C\hat{Q}A = 1$$

$$C\hat{Q}A = 45^\circ$$

Q හි දී ගැට ගැසූ කම්බිය පොළොව සමග සාදන කෝණය 45° කි.

14.4 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරෙන් දළ රූප සටහන් අඳින්න.
   (i) උස කොස් ගසක පාමුල සිට 22 mක් ඈතින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක දී ගස මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය 30^{o} ක් විය.
   (ii) උස කුළුණක මුදුනේ සිටින මිනිසෙකුට කුළුණ පාමුල සිට 15 mක් ඈතින් පොළොව මත ඇති ගඩොල් කැටයක් 60^{o} ක අවරෝහණ කෝණයකින් දිස් වේ.
   (iii) ඇන්ටනා කණුවක මුදුනේ ගැට ගසා ඇති 12 m දිග කම්බියක් පොළොවත් සමඟ 45^{o} කෝණයක් සෑදෙන ආකාරයට ඇද පොළොව මත ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා ඇත.
   (iv) 30 mක් උස ගොඩනැගිල්ලක පහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ සිට බලන විට ඈතින් පෙනෙන කන්දක මුදුන 30^{o}ක ආරෝහණ කෝණයකින් දිස් වේ. එතැන් සිට සිරස් ව ගොඩනැගිල්ලේ ඉහළම ලක්ෂ්‍යයේ දී කන්දේ මුදුන පෙනෙන ආරෝහණ කෝණය 60^{o} කි.
   (v) තට්ටු ගොඩනැගිල්ලක 20 m උස ස්ථානයක සිටින මිනිසෙකුට ඉහළ අහසේ ගමන් කරන ගුවන් යානක් 60^{o}ක ආරෝහණ කෝණයකින් දිස් විය. එම මොහොතේ ම ගුවන් යානයට සිරස් ලෙස පහළින් කුඹුරක බැඳ සිටින ගවයෙකු 30^{o}ක අවරෝහණ කෝණයකින් දිස්වේ.

2. ගංගාවක එක ඉවුරක 15 m උස කණුවක් තිබේ. එම කණුවේ සිට හරි කෙළින් අනික් ඉවුරේ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට බලන විට කණුවේ මුදුන දකින ආරෝහණ කෝණය 30°ක් ලෙස දිස්වේ.
   (i) ඉහත තොරතුරු දැක්වීමට දළ රූප සටහනක් අඳින්න.
   (ii) ගංගාවේ පළල x ලෙස ගෙන ගංගාවේ පළල ලබා ගන්න. ($\sqrt{3} = 1.7$ ලෙස ගන්න.)

3. වෙසක් තොරණක පාමුල සිට 8 m දුර තොරණෙන් ඉවතට ගමන් කළ විට තොරණ මුදුන පෙනෙන්නේ පොළොව සමඟ 60°ක ආරෝහණ කෝණයක් සාදන ආකාරයට ය.
   (i) ඉහත තොරතුරු ඇතුළත් දළ සටහනක් අඳින්න.
   (ii) තොරණේ උස h ලෙස ලකුණු කර තොරණේ උස සොයන්න. ($\sqrt{3} = 1.7$ ලෙස ගන්න.)

4. 12 m උස කුළුනක මුදුනේ ගැට ගැසූ කම්බියක් තිරස් පොළොවේ කුළුණේ පාමුල සිට කිසියම් දුරකින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකට ඇද ගැට ගසා තිබේ. පොළොව සහ කම්බිය අතර කෝණය 45° කි.
   (i) ඉහත තොරතුරු දැක්වෙන දළ සටහනක් අඳින්න.
   (ii) කම්බිය ඇදී ඇති කොටසේ දිග y ලෙස ගෙන, කම්බියේ දිග ලබා ගන්න. ($\sqrt{2} = 1.4$ ලෙස ගන්න.)

5. ඉනිමඟක් බිත්තියකට හේත්තු කර ඇත්තේ පොළොවත් සමඟ 60°ක කෝණයක් සෑදෙන ලෙසිනි. ඉනිමගේ ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ සිට බිත්තිය දිගේ පොළොවට ඇති සිරස් උස 3 mක් වේ.
   (i) මෙම තොරතුරු දැක්වීමට දළ රූප සටහනක් අඳින්න.
   (ii) ඉනිමගේ දිග සොයන්න.
   (iii) ඉනිමගේ පහළ කෙළවරේ සිට බිත්තියට ඇති කෙටි ම දුර සොයන්න. ($\sqrt{3} = 1.7$ ලෙස ගන්න.)

14.6 තිරස් තලයේ කෝණ

පොළොවට සමාන්තර වන ආකාරයට පිහිටා ඇති තලය තිරස් තලයයි. මෙම තලය තුළ සිදුවන සිදුවීම් සම්බන්ධයෙන් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ඇසුරෙන් ගණනය කිරීම් සිදු කරන ආකාරය අප මෙහි දී සලකා බලනු ලැබේ.

දිගංශය

එකම තිරස් තලය මත එක ස්ථානයක් අනුබද්ධයෙන් අවට පිහිටා ඇති ස්ථානවල පිහිටීම දැක්වීමට දිගංශය යොදා ගන්නා බවත් උතුරු දිශාවේ සිට දක්ෂිණාවර්තව මනිනු ලබන කෝණය දිගංශය ලෙස හඳුන්වන බවත්, දිගංශය ඉලක්කම් තුනකින් ලියනු ලබන බවත් මීට පෙර ඔබ ඉගෙන ගෙන ඇත.

ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත යොදා ගනිමින් තිරස් පොළොව මත ගණනය කිරීම් සිදු කරන ආකාරය දැන ගැනීමට පහත නිදසුන් සලකා බලමු.

නිදසුන 1

A සිට B හි දිගංශය 060° නම් B සිට A හි දිගංශය සොයන්න.

A සිට B සහ ලක්ෂ්‍ය දැක්වීමට පහත ආකාරයේ රූපයක් අඳිමු. ජ්‍යාමිතික ආකාරයට B සිට A හි දිශාවට ඇති දක්ෂිණාවර්ත කෝණය ගණනය කරමු.

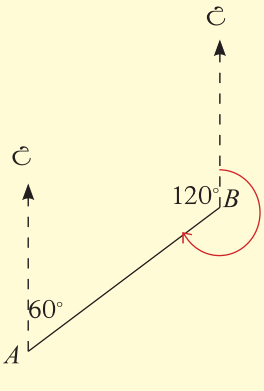
මිත්‍ර කෝණවලට අනුව B හි වාමාවර්ත කෝණය

වාමාවර්ත කෝණය $= 180^\circ - 60^\circ$

$= 120^\circ$

B සිට A හි දිගංශය $= 360^\circ - 120^\circ$

$= 240^\circ$



නිදසුන 2

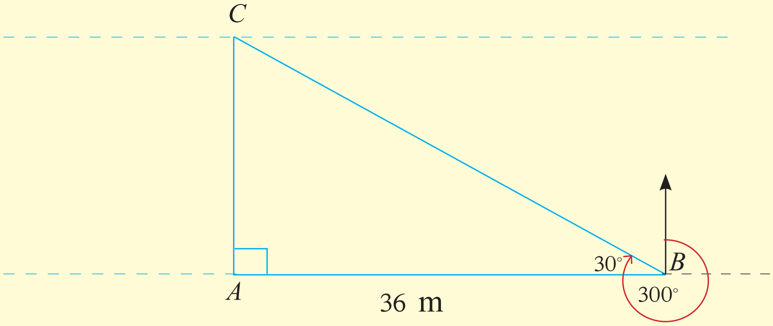
බටහිර සිට නැගෙනහිර දෙසට ගලා බසින ගංගාවක එක ඉවුරක පිහිටි A නම් ලක්ෂ්‍යයේ සිට සෘජු ලෙස අනික් ඉවුරේ තේක්ක ගසක් ඇත. A ලක්ෂ්‍යයේ සිට 36 m ක් දුරින් ගංගාවට සමාන්තරව පහළ B ලක්ෂ්‍යයේ දී තේක්ක ගසේ පාමුල 300^{o} ක දිගංශයකින් දිස් වේ.

(i) තේක්ක ගසේ පාමුල C ලෙස ගෙන ඉහත තොරතුරු දැක්වෙන දළ රූපයක් අඳින්න.

(ii) ගංගාවේ පළල සොයන්න.

$\tan\ 30^{o} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ හා $\sqrt{3} = 1.7$ ලෙස ගන්න.

(i)



(ii) $A\hat{B}C = 300^{\circ} - 270^{\circ} = 30^{\circ}$

ABC සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ $\hat{B}$ කෝණය සලකා ටැංජන අනුපාතය සලකමු.

$$\tan 30^{\circ} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AC}{36\ \text{m}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \times 36\ \text{m} = AC$$

$$\frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \times 36\ \text{m} = AC$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\not{3}} \times \not{36}^{\,12} = AC$$

$$12\sqrt{3} = AC$$

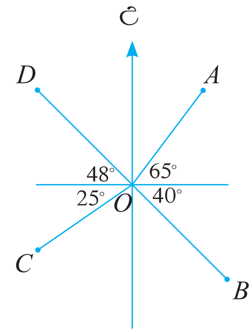
$$12 \times 1.7 = AC$$

$$20.4 = AC$$

ගංගාවේ පළල 20.4 m පමණ වේ.

14.5 අභ්‍යාසය

1. (i) රූපයට අනුව O ලක්ෂ්‍යයේ සිට A, B, C, D ලක්ෂ්‍යවල දිගංශයන් වෙන වෙන ම ලියා දක්වන්න.



(ii) X ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් පහත දැක්වෙන දිගංශ රූපයකින් නිරූපණය කරන්න.

X සිට P හි දිගංශය 055°, X සිට Q හි දිගංශය 125°
X සිට R හි දිගංශය 205°, X සිට S හි දිගංශය 290°

(iii) A සිට B හි දිගංශය 040° නම් B සිට A හි දිගංශය සොයන්න.

(iv) C සිට D හි දිගංශය 120° නම් D සිට C හි දිගංශය සොයන්න.

(v) E සිට F හි දිගංශය 200° නම් F සිට E හි දිගංශය සොයන්න.

(vi) G සිට H හි දිගංශය 270° නම් H සිට G හි දිගංශය සොයන්න.

(vii) A නම් ලක්ෂ්‍යයෙන් ගමන් ආරම්භ කරන ළමයෙකු 090° දිගංශයකින් 50 mක් ගමන් කර B වෙත පැමිණ B සිට 140° දිගංශයකින් 50 mක් ගමන් කර C වෙත පැමිණේ. C සිට A හි දිගංශය සොයන්න.

(viii) P සිට Q හි දිගංශය 180° කි. දුර 35 mකි. Q සිට R හි දිගංශය 240° කි. දුර 35 mකි. R සිට P හි දිගංශය සොයන්න.

(ix) W සිට 130° දිගංශයකින් 25 mදුරින් X ද X සිට 090° දිගංශයකින් 40 m දුරින් Y ද Y සිට 050° දිගංශයකින් 25 mදුරින් Z ද පිහිටා ඇත. Z සිට W හි දිගංශය සොයන්න.

(x) P සිට Q හි දිගංශය මෙන් Q සිට P හි දිගංශය දෙගුණයක් වේ. රූප සටහනක් ඇඳ පෙන්වන්න.

2. P වරායේ සිට 090° දිගංශයකින් 10 km ක් යාත්‍රා කරන නැවක් එතැන් සිට 030° ක දිගංශයකින් 10 km යාත්‍රා කර Q වරායට ළඟා වේ.
   (i) මෙම තොරතුරු සඳහා දළ සටහනක් අඳින්න.
   (ii) P සිට Q හි දිගංශය සොයන්න.

3. X ස්ථානයේ තිබූ විදුලි පහන් කණුවක් එතනින් ඉවත් කර X සිට 120°ක දිගංශයකින් සහ 20 mක් දුරින් වූ Y ස්ථානයේ සිටුවන ලදී. ($\sin 30° = \frac{1}{2}$)
   (i) මෙම තොරතුරු සඳහා දළ සටහනක් අඳින්න.
   (ii) කණුව X සිට කොපමණ දුරක් දකුණු දෙසින් පිහිටයි ද?

4. P නම් ස්ථානයේ සිටින පුද්ගලයෙකුට ඊට 500 mක් උතුරින් පිහිටි Q නම් වරායක සිට නැගෙනහිර දිශාවට ගමන් කරන X සහ Y නැව් දෙකක් පිළිවෙළින් 030°, 060° දිගංශයන්ගෙන් නිරීක්ෂණය කරයි. එම අවස්ථාවේදී නැව් දෙක අතර දුර සොයන්න.

5. මුහුදු වෙරළේ උතුරු දකුණු දිශා ඔස්සේ 120 mක් ඈතින් පිහිටි A හා B නම් ලක්ෂ්‍ය දෙකක සිටින ළමයින් දෙදෙනෙකු ඈත මුහුදේ ගමන් කරන නැවක් එකම මොහොතේ නිරීක්ෂණය කරයි. එක ළමයෙකු 060^{o} දිගංශයකින් ද අනික් ළමයා 150^{o} ක දිගංශයකින් ද නැව දකින ලදි. ($\sin 60^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^{o} = \frac{1}{2}$, $\sqrt{3} = 1.7$)

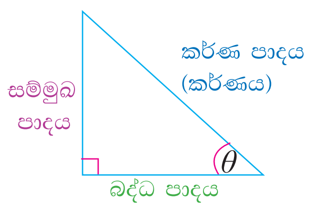
(i) දත්තයන් දැක්වීමට රූප සටහන් අඳින්න.
(ii) නැවේ සිට එක් එක් ළමයාට ඇති දුර සොයන්න.

සාරාංශය

- සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණ සඳහා,

$\sin\theta = \dfrac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණ පාදය}}$ $\cos\theta = \dfrac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණ පාදය}}$

$\tan\theta = \dfrac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{බද්ධ පාදය}}$



- පරිසරයේ පිහිටීම් හඳුනා ගැනීමට ආරෝහණ කෝණය, අවරෝහණ කෝණය සහ දිගංශය භාවිත කරයි.
- සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක සුළු කෝණයක් සහ එක පාදයක් දන්නා විට ඉතිරි පාද දෙක සෙවිය හැකි ය.
- සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණ පාද දෙකක් දන්නා විට ඉතිරි පාද සහ සුළු කෝණ දෙක සෙවිය හැකි ය.

15 දත්ත නිරූපණය හා අර්ථකථනය (I කොටස)

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය ඇතුළත් වගුවක් පිළියෙල කිරීමට සහ,
- සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇඳීමට

හැකියාව ලැබේ.

15.1 සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුව

දත්ත නිරූපණය කිරීම සඳහා අඳිනු ලබන ප්‍රස්තාර වර්ග පිළිබඳව ඔබ මීට පෙර ශ්‍රේණිවල දී ඉගෙන ඇත. චිත්‍ර ප්‍රස්තාර, තීර ප්‍රස්තාර, වට ප්‍රස්තාර, ජාල රේඛය වැනි ප්‍රස්තාර දත්ත නිරූපණය සඳහා යොදා ගත් ආකාරය සිහිපත් කරන්න.

එළවලු වෙළෙන්දෙක් සතියේ දින 5ක් තුළ අලෙවි කරන ලද එළවලු කිලෝග්රෑම් ප්‍රමාණය පිළිබඳ තොරතුරු පහත වගුවේ දැක්වේ.

දවස	අලෙවි කළ එළවලු ප්‍රමාණය (kg)
සඳුදා	10
අඟහරුවාදා	15
බදාදා	20
බ්‍රහස්පතින්දා	8
සිකුරාදා	7

(i) අඩුම එළවලු ප්‍රමාණයක් අලෙවි කළ දිනය කවදා ද?
අඩුම එළවලු ප්‍රමාණයක් අලෙවි කළ දිනය සිකුරාදා ය.

(ii) අඟහරුවාදා දිනය අවසන් වන විට කොපමණ එළවලු ප්‍රමාණයක් විකුණා තිබේ ද?
$10 + 15 = 25$ kg

(iii) දින 5 තුළ විකුණූ මුළු එළවලු ප්‍රමාණය කොපමණ ද?
$10 + 15 + 20 + 8 + 7 = 60$ kg

මෙලෙස පිළිවෙළින් සංඛ්‍යාතයන් එකතු කරමින් දක්වන සංඛ්‍යාතය සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය ලෙස හඳුන්වනු ලැබේ.

දැන් අපි ඉහත තොරතුරු සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය දැක්වෙන වගුවක් මගින් පිළියෙල කරමු.

දවස	විකුණූ එළවලු ප්‍රමාණය (ස්කන්ධය) kg	සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය (kg)
සඳුදා	10	10
අඟහරුවාදා	15	25
බදාදා	20	45
බ්‍රහස්පතින්දා	8	53
සිකුරාදා	7	60

නිදසුන 1

පහත දැක්වෙනුයේ මාසයක් තුළ එක් එක් දිනක දී එක්තරා රූපවාහිනී නාලිකාවක් ඔස්සේ බෞද්ධ වැඩසටහනක් ප්‍රචාරය වූ කාලය (මිනිත්තුවලින්) දක්වා ඇති සංඛ්‍යාත වගුවකි.

ප්‍රචාරය වූ කාලය (මිනිත්තු)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
දින ගණන	4	7	8	6	3	2

මෙම තොරතුරු දැක්වීම සඳහා සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය දැක්වෙන වගුවක් පිළියෙල කරන්න.

- 0 - 10 පන්තියේ සංඛ්‍යාතය 4 බව ඔබට පෙනෙනු ඇත.
- 10 - 20 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සංඛ්‍යාතය 7 හා 0 - 10 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සංඛ්‍යාතය 4 එකතු කළ විට (4 + 7) ලැබෙන අගය 11 වේ. ඒ අනුව (10 - 20) පන්ති ප්‍රාන්තරය තෙක් සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය 11 වේ.
- එලෙසම 20 - 30 තෙක් සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය වන්නේ 4 + 7 + 8 එකතු කළ විට 19 යන අගය යි. එම ආකාරයට යම් පන්ති ප්‍රාන්තරයක් තෙක් සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය සෙවීමේ දී ඊට ඉහළින් ඇති එක් එක් පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සංඛ්‍යාතයන් හා එම පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සංඛ්‍යාතය එකතු කළ යුතු ය.

දැන් අපි සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුව පිළියෙල කරමු.

ප්‍රචාරය වූ කාලය (මිනිත්තු)	දින ගණන	සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය
0 - 10	4	4
10 - 20	7	11
20 - 30	8	19
30 - 40	6	25
40 - 50	3	28
50 - 60	2	30

15.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දී ඇති සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය සඳහා සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් පිළියෙල කරන්න.

පන්ති ප්‍රාන්තර	සංඛ්‍යාතය (f)
0 - 5	4
5 - 10	10
10 - 15	15
15 - 20	12
20 - 25	7
25 - 30	2

2. පහත දැක්වෙනුයේ එක්තරා ගුරු විද්‍යාලක පුහුණුව සඳහා පැමිණි ගුරුවරුන්ගේ වයස කාණ්ඩ කර ඊට අනුරූප ගුරුවරු සංඛ්‍යාව දැක්වෙන සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියකි.

වයස (අවුරුදු)	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45
ගුරුවරු සංඛ්‍යාව	2	6	12	7	3

මෙම සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තිය සඳහා සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය දැක්වෙන වගුවක් පිළියෙල කරන්න.

15.2 සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය

දැන් අපි සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇඳීම සඳහා අවශ්‍ය වූ තොරතුරු මොනවා දැයි විමසා බලමු. ඉහත දැක්වෙන අභ්‍යාසයේ දී සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය දැක්වෙන වගුවක් පිළියෙල කර ගැනීමෙන් අනතුරුව පන්ති ප්‍රාන්තරවල ඉහළ අගය හා ඊට අනුරූප සමුච්චිත සංඛ්‍යාතයත් පටිපාටිගත යුගල වශයෙන් ගෙන එම පටිපාටිගත යුගල් ඛණ්ඩාංක තලයක ලකුණු කර ඒ එක් එක් ලක්ෂ්‍ය අනුපිළිවෙළින් සුමටව යා කර ලබා ගන්නා වක්‍රය **සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය** වේ.

නිදසුන 1

පහත දැක්වෙනුයේ ගණිත දිනය වෙනුවෙන් පවත්වනු ලබන පිරිවෙන් සමස්ත ලංකා තරගාවලියක දී එක්තරා ගණිත උපකරණයක් සකස් කිරීමට ගත කරන කාලය (මිනිත්තු) හා ඊට අනුරූප සිසුන් ගණන දැක්වෙන සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියකි.

ගත කළ කාලය (මිනිත්තු)	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45
සිසුන් ගණන	2	6	10	11	6	3	2

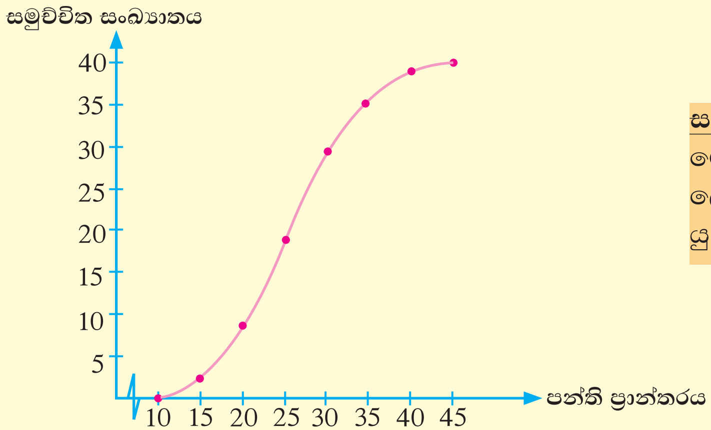
දැන් අපි ඉහත සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තිය සඳහා සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් පිළියෙල කරමු.

ගත කළ කාලය (මිනිත්තු)	සිසුන් ගණන, සංඛ්‍යාතය (f)	සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය
10 - 15	2	2
15 - 20	6	8
20 - 25	10	18
25 - 30	11	29
30 - 35	6	35
35 - 40	3	38
40 - 45	2	40

ඉහත දැක්වෙන පරිදි සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුව පිළියෙල කිරීමෙන් අනතුරුව පන්ති ප්‍රාන්තරවල ඉහළ අගය හා ඊට අනුරූප සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය පටිපාටිගත යුගල ලෙස ලියමු.

(15, 2), (20, 8), (25, 18), (30, 29), (35, 35), (40, 38), (45, 40)

මෙම පටිපාටිගත යුගල ඛණ්ඩාංක තලයක ලකුණු කර සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳිමු.



<u>සැ.යු.</u>
මෙහි ආරම්භක ලක්ෂ්‍යය ලෙස (10, 0) පටිපාටිගත යුගල ගත යුතු වේ.

15.2 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙනුයේ දක්ෂිණ අධිවේගී මාර්ගය තුළ පැය 6ක කාලයක දී ගමන් කරන මෝටර් වාහන ගණන පිළිබඳ රැස් කළ තොරතුරු ඇතුළත් සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියකි. මෙහි කාලය මිනිත්තු 60න් 60ට කාණ්ඩ කර ඇත.

කාලය (මිනිත්තු)	0 - 60	60 - 120	120 - 180	180 - 240	240 - 300	300 - 360
වාහන ගණන	40	60	100	160	80	60

(i) ඉහත තොරතුරු දැක්වීමට සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් පිළියෙල කරන්න.
(ii) එම වගුව භාවිතයෙන් සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින්න.

2. පහත දැක්වෙනුයේ එක්තරා විහාරස්ථානයක් මගින් සංවිධානය කරන ලද ලේ දන්දීමේ වැඩසටහනකට සහභාගි වූවන්ගේ වයස (අවුරුදු) සහ සහභාගි වූ සංඛ්‍යාව දැක්වෙන සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියකි.

වයස (අවුරුදු)	20 - 24	24 - 28	28 - 32	32 - 36	36 - 40	40 - 44
සහභාගි වූ ගණන	14	16	24	22	15	9

(i) මෙම වගුව පිටපත් කරගෙන එයට සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය දැක්වෙන තීරයක් එක් කරන්න.
(ii) මෙම තොරතුරු දැක්වීමට සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින්න.

සාරාංශය

- සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇඳීමට සමුච්චිත සංඛ්‍යාත ඇතුළත් වගුවක් සකස් කළ යුතුයි.
- පන්ති ප්‍රාන්තරවල ඉහළ අගය හා ඊට අනුරූප සමුච්චිත සංඛ්‍යාත අගය පටිපාටිගත යුගල ලෙස ගෙන ඒවා ඛණ්ඩාංක තලයක ලකුණු කර සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳිනු ලැබේ.

16 දත්ත නිරූපණය හා අර්ථකථනය (II කොටස)

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- චතුර්ථක හඳුනා ගැනීමට,
- දත්ත සමූහයක දෙවන චතුර්ථකය එම දත්ත සමූහයේ මධ්‍යස්ථයට සමාන බව පෙන්වීමට,
- අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය හඳුනා ගැනීමට සහ
- සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇසුරෙන් චතුර්ථක හා අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සෙවීමට,

හැකියාව ලැබේ.

16.1 හැඳින්වීම

දත්ත නිරූපණය හා අර්ථකථනය පිළිබඳ ව ඔබ මීට පෙර ඉගෙන ගෙන ඇති කරුණු සිහිපත් කිරීමට පහත පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. (i) 23, 25, 12, 16, 30, 40, 13, 10 මෙම සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියේ පරාසය සොයන්න.
   (ii) 2, 4, 6, 3, 4, 6, 5, 6 මෙම සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියේ මාතය කුමක් ද?
   (iii) 2, 4, 6, 7, 8, 10 මෙම සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය සොයන්න.
   (iv) 2, 4, 6, 5, 3 මෙම සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය සොයන්න.

2. 20, 24, 12, 16, 12, 10, 04 සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියේ,
   (i) පරාසය සොයන්න. (ii) මාතය සොයන්න.
   (iii) මධ්‍යස්ථය සොයන්න. (iv) මධ්‍යන්‍යය සොයන්න.

3. එක්තරා දිනක දුම්රිය ප්‍රවේශ පත්‍රයක් මිල දී ගැනීමට එක් එක් පුද්ගලයින් ගත කළ කාලය පහත වගුවේ දැක්වේ.

කාලය (මිනිත්තු)	පුද්ගලයින් ගණන
0 - 4	6
4 - 8	4
8 - 12	10
12 - 16	15
16 - 20	12
20 - 24	3

(i) වැඩිම පිරිසක් රැඳී සිටි කාල ප්‍රාන්තරය ලියන්න.

(ii) මෙම සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය අඩංගු පන්ති ප්‍රාන්තරය සොයන්න.

(iii) 12 - 16 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ මධ්‍ය අගය උපකල්පිත මධ්‍යන්‍යය ලෙස ගෙන එක් පුද්ගලයෙකු රැඳී සිටි මධ්‍යන්‍යය කාලය සොයන්න.

4. පහත දැක්වෙන්නේ මාර්ග සංඥා ස්ථාන කීපයක දී නතර වී සිටි වාහන ගණන හා ඒ සඳහා ගත කළ කාලය පිළිබඳ තොරතුරු ඇතුළත් සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියකි.

කාලය (මිනිත්තු)	වාහන ගණන (f)
0 - 4	40
4 - 8	50
8 - 12	70
12 -16	150
16 - 20	80
20 - 24	65
24 - 28	45

(i) වැඩිම වාහන සංඛ්‍යාවක් නතර වී සිටි කාල ප්‍රාන්තරය කුමක් ද?

(ii) ඉහත වගුවට මධ්‍ය අගය තීරුවක් හා $f \times x$ තීරුවක් එක්කර නැවත වගුව සකස් කරන්න.

(iii) එමගින් ඉහත සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියේ වාහනයක් නවතා තිබූ මධ්‍යන්‍යය කාලය ආසන්න මිනිත්තුවට ගණනය කරන්න.

(iv) ඉහත ආකාරයට දිනකට එවැනි වාහන 100 000ක් මගින් අපතේ යැවෙන කාලය කොපමණ ද?

(v) එසේ නවතා තිබූ එක් වාහනයකින් මිනිත්තුවකට වැය වූ ඉන්ධන සඳහා ගාස්තුව රුපියල් 2ක් නම් එදින එම වාහනවලින් අපතේ ගිය ඉන්ධන සඳහා වැය වූ මුළු මුදල කොපමණ ද?

(vi) එවැනි මාර්ග තදබද අවස්ථාවල මෙසේ අපතේ යන මුදල් ඉතිරි කර ගැනීමට ඔබ විසින් කරනු ලබන යෝජනාවක් ලියන්න.

5. ඉහත 3 වන ගැටලුවේ වගුව භාවිත කර සමුච්චිත සංඛ්‍යා වගුවක් පිළියෙල කර සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින්න.

16.2 චතුර්ථක

පහත දැක්වෙන සංඛ්‍යා ව්‍යාප්ති දෙක පිළිබඳ විමසා බලමු.

(i) 20, 24, 30, 45, 50, 52, 56

(ii) 4, 12, 14, 20, 28, 29, 35, 45, 60, 73, 84, 87, 89, 90, 94

ඉහත (i) සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තිය සලකමු.

එහි පරාසය $56 - 20 = 36$

මධ්‍යස්ථයේ පිහිටීම $= \frac{7+1}{2}$ වැනි අය ගණන

$= 4$ වැනි අය ගණන

$\therefore$ මධ්‍යස්ථය $= 45$ වේ.

ඉහත (ii) සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තිය සලකමු.

එහි පරාසය $= 94 - 4$

$= 90$

මධ්‍යස්ථයේ පිහිටීම $= \frac{15+1}{2}$ වැනි අය ගණන

$= 8$ වැනි අය ගණන

$\therefore$ මධ්‍යස්ථය $= 45$ වේ.

ඉහත (i) සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ සංඛ්‍යාවල පරාසය ගත්විට 20 – 56 අතර පරාසයේ එම සංඛ්‍යා විසිරී ඇත. තව ද (ii) සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියේ සංඛ්‍යාවල පරාසය ගත් විට 4 – 94 අතර පරාසයේ එම සංඛ්‍යා විසිරි ඇත. ඒ අනුව එම සංඛ්‍යා ව්‍යාප්ති දෙකේ විසිරීම ගත් කළ මුල් සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තිය කුඩා පරාසයක් තුළත් දෙවන සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තිය විශාල පරාසයක් තුළත් පැතිරී ඇත. තව ද එම සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තිවල නිරූපය අගය ලෙස මධ්‍යස්ථය කීය දැයි සොයා බැලූ විට පළමු සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියේ හා දෙවන සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියේ එම අගය 45 වේ. එවැනි අවස්ථාවල සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියේ පිහිටීම් පිළිබඳ ව මධ්‍යස්ථය මගින් අර්ථකථනය කිරීම සාධාරණ නොවේ. එවැනි අවස්ථාවල දත්ත අර්ථකථනය කිරීම සඳහා චතුර්ථක භාවිත කරනු ලැබේ.

දැන් අපි පහත සඳහන් සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තිය සලකා බලමු.

12, 16, 18, 24, 33, 36, 42

මෙම සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තිය ආරෝහණ පිළිවෙළට ලියා ඇති බැවින් එහි දත්ත ගණනේ හරි මැද පිහිටීම එනම් මධ්‍යස්ථය සෙවීමට $\left(\frac{\text{දත්ත ගණන} + 1}{2}\right)$ පිහිටීම භාවිත කළ හැකි ය.

ඒ අනුව, ඉහත සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථයේ පිහිටීම $= \frac{7+1}{2}$ වැනි අය ගණන

$= 4$ වැනි අය ගණන

මධ්‍යස්ථය $= 24$ වේ.

එම ආකාරයට අපි චතුර්ථක පිහිටන අයුරු සලකා බලමු.

සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියක,

- මධ්‍යස්ථය පිහිටීම $= \left(\frac{\text{දත්ත ගණන} + 1}{2}\right)$ වැනි අය ගණනයි.
- මධ්‍යස්ථ අගයේ වම්පස දත්තවල මධ්‍යස්ථයට පහළ සීමාවේ දත්තවල මධ්‍යස්ථ අගය පළමු චතුර්ථකය ලෙස හැඳින්වේ.
- මධ්‍යස්ථ අගයේ දකුණු පස පිහිටි දත්තවල මධ්‍යස්ථ අගය තුන්වන චතුර්ථකය ලෙස ද හැඳින්වේ.
- ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය දෙවන චතුර්ථකය වේ.
- පළමු හා තුන්වන චතුර්ථක අතර පරාසය අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය ලෙස හැඳින්වේ. එය මෙසේ ලබා ගනිමු.

අන්තශ් චතුර්ථකය පරාසය = තුන්වන චතුර්ථකය – පළමුවන චතුර්ථකය

- පළමු චතුර්ථකය Q_1 , දෙවන චතුර්ථකය Q_2 සහ තුන්වන චතුර්ථකය Q_3 ලෙස අංකනය කරයි.

මේ සඳහා නිදසුනක් ලෙස ආරෝහණ පිළිවෙළට ලියූ පහත දැක්වෙන සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තිය සලකා බලමු.

නිදසුන 1

12, 15, 18, 20, 21, 25, 27, 34, 37, 42, 43 සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තිය සලකන්න. එහි දෙවන චතුර්ථකය, පළමු චතුර්ථකය, තුන්වන චතුර්ථකය සහ අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

I ක්‍රමය

මුලින් ම මධ්‍යස්ථය සොයමු. එනම් දෙවන චතුර්ථකය සොයමු.

දෙවන චතුර්ථකයේ පිහිටීම $= \frac{n+1}{2}$ වැනි අය ගණන

$= \frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$ වැනි අය ගණන

12, 15, 18, 20, 21, 25, 27, 34, 37, 42, 43

එම අගය $Q_2 = 25$ වේ.

දැන් අපි 25ට වම් පසින් පිහිටි දත්ත සලකමු. ඒවා පහත පරිදි ලියා ගත් විට, 12, 15, 18, 20, 21 වේ.

මෙම දත්තවල මධ්‍යස්ථය සොයමු. එය පළමු චතුර්ථකය වේ.

එනම් Q_1 පිහිටීම $= \frac{n+1}{2}$ වැනි අය ගණන

$= \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$ වැනි දත්තය

12, 15, 18, 20, 21

එම අගය $Q_1 = 18$ වේ.

දැන් අපි 25ට දකුණු පසින් පිහිටි දත්ත සලකමු. ඒවා පහත පරිදි ලියා ගත් විට, 27, 34, 37, 42, 43 වේ.

මෙම දත්තවල මධ්‍යස්ථය සොයමු. එය තුන්වන චතුර්ථකය වේ.

එනම් Q_3 පිහිටීම $= \frac{n+1}{2}$ වැනි අය ගණන

$= \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$ වැනි දත්තය

27, 34, 37, 42, 43

එම අගය $Q_3 = 37$

ඉන් පසුව අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සෙවීමට $Q_3 - Q_1$ භාවිත කරමු. ඒ අනුව,

අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය $= 37 - 18$

$= 19$

මෙහි දී අපි ලබා ගන්නා චතුර්ථකවල පිහිටීම් දැක්වෙන (ස්ථානය දැක්වෙන) අගයන් ක්‍රම සූචක අගය ලෙස ද හඳුන්වයි.

ඉහත නිදසුනට අනුව පැහැදිලි වනුයේ සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියක් ආරෝහණ පිළිවෙළට ලියූ විට එම දත්ත සමූහයේ හරි මැද පිහිටන අගය මධ්‍යස්ථය වන බවත්, එය හරියට ම දෙවන චතුර්ථකය බවත් එය මුළු දත්ත ගණනින් 50% වන ස්ථානය බවත් ය.

තව ද මධ්‍යස්ථ අගයෙන් වම්පස පිහිටන දත්ත සමූහයේ මධ්‍යස්ථය පළමු චතුර්ථකය වන බවත් එහි පිහිටීම මුළු දත්ත ගණනින් 25%ක් වන ස්ථානය බවත් ය.
එම ආකාරයට ම මධ්‍යස්ථ අගයෙන් දකුණු පස පිහිටන දත්ත සමූහයේ මධ්‍යස්ථය තුන්වන චතුර්ථකය වන බවත් එහි පිහිටීම මුළු දත්ත ගණනින් 75%ක් වන ස්ථානය බවත් ය.

සටහන

- සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියක මධ්‍යස්ථය වන අගය දෙවන චතුර්ථකයේ අගය ම වේ.

$\therefore$ මධ්‍යස්ථය = දෙවන චතුර්ථකය

- අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය අන්තර් චතුර්ථක පරාසය නමින් ද හඳුන්වයි.

දැන් අපි ඉහත දී ඇති සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තිය ම ගෙන එහි චතුර්ථක සෙවීම සඳහා පහත සඳහන් ක්‍රමය ද භාවිත කරමු.

නිදසුන 2

12, 15, 18, 20, 21, 25, 27, 34, 37, 42, 43 සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තිය සලකන්න. එහි දෙවන චතුර්ථකය, පළමු චතුර්ථකය, තුන්වන චතුර්ථකය සහ අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

II ක්‍රමය

12, 15, 18, 20, 21, 25, 27, 34, 37, 42, 43

මධ්‍යස්ථය පිහිටීම (Q_2 පිහිටීම) $= \frac{1}{2}(n+1)$ වැනි අය ගණන

$= \frac{1}{2} \times (11+1)$ වැනි අය ගණන

$= \frac{1}{2} \times 12$

$= 6$ වැනි අය ගණන

මධ්‍යස්ථය (Q_2) $= 25$

පළමු චතුර්ථකය පිහිටීම $= \frac{1}{4}(n+1)$ වැනි අය ගණන
(Q_1 පිහිටීම)

$= \frac{1}{4} \times (11+1)$ වැනි අය ගණන

$= \frac{1}{4} \times 12$ වැනි අය ගණන

$= 3$ වැනි අය ගණන

$\therefore$ පළමු චතුර්ථක (Q_1) $= 18$

තුන්වන චතුර්ථකය පිහිටීම $= \frac{3}{4}(n+1)$ වැනි අය ගණන
(Q_3 පිහිටීම)

$= \frac{3}{4} \times (11+1)$ වැනි අය ගණන

$= \frac{3}{4} \times 12$ වැනි අය ගණන

$= 9$ වැනි අය ගණන

$\therefore$ තුන්වන චතුර්ථකය (Q_3) $= 37$

චතුර්ථක සෙවීමෙන් අනතුරු ව අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සෙවීමට $Q_3 - Q_1$ සොයමු.
ඒ අනුව අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය $= 37 - 18$
$= 19$

ඉහත නිදසුනට අනුව චතුර්ථක ගණනය කිරීම සඳහා පහත දැක්වෙන සම්බන්ධතා භාවිත කර ඇති බව දැන් ඔබට පැහැදිලි වනු ඇත. එනම්,

පළමු චතුර්ථකයේ පිහිටීම (Q_1 පිහිටීම) $= \frac{1}{4}$ (දත්ත ගණන $+ 1) = \frac{1}{4}(n+1)$ වැනි අය ගණන

දෙවන චතුර්ථකයේ පිහිටීම (Q_2 පිහිටීම) $= \frac{1}{2}$ (දත්ත ගණන $+ 1) = \frac{1}{2}(n+1)$ වැනි අය ගණන

තුන්වන චතුර්ථකයේ පිහිටීම (Q_3 පිහිටීම) $= \frac{3}{4}$ (දත්ත ගණන $+ 1) = \frac{3}{4}(n+1)$ වැනි අය ගණන

ඕනෑ ම සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියක අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය $=$ තුන්වන චතුර්ථකය $-$ පළමු චතුර්ථකය
$= Q_3 - Q_1$

නිදසුන 3

පාසලක සේවය කරනු ලබන ගුරුවරුන් 13 දෙනෙකුගේ වයස (අවුරුදු) පහත දැක්වෙන ආකාරයට ආරෝහණ පිළිවෙළට ලියා ඇත.

24, 28, 31, 33, 35, 36, 38, 40, 42, 42, 50, 52, 56

මෙම දත්ත සමූහයේ

(i) මධ්‍යස්ථය සොයන්න.

(ii) පළමු වැනි චතුර්ථකය සොයන්න.

(iii) තුන්වැනි චතුර්ථකය සොයන්න.

(iv) අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

(i) මධ්‍යස්ථය $= \frac{n+1}{2} = \frac{13+1}{2} = 7$ වැන්නේ පිහිටි අගය

මෙය දෙවන චතුර්ථකයේ ක්‍රම සූචක අගයයි. එනම් මධ්‍යස්ථය $= 38$

(ii) පළමු චතුර්ථකය සෙවීම සඳහා 24, 28, 31, 33, 35, 36 සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය සොයමු.

පළමුවන චතුර්ථක අගය $= \frac{31+33}{2}$

පළමුවන චතුර්ථක අගය $= 32$

(iii) තුන්වන චතුර්ථකය සෙවීම සඳහා 40, 42, 42, 50, 52, 56 සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය සොයමු.

Q_3 තුන්වන චතුර්ථක අගය $= \frac{42+50}{2}$

$= \frac{92}{2}$

$= 46$

(iv) අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය $= Q_3 - Q_1$

$= 46 - 32$

$= 14$

16.3 සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇසුරෙන් චතුර්ථක සෙවීම

දැන් අපි සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය භාවිතයෙන් චතුර්ථක සොයන ආකාරය විමසා බලමු.

පහත දැක්වෙනුයේ එක්තරා දුරකථන කුටියක ඇමතුම් ලබා ගත් 40 දෙනෙකුගේ ඇමතුම් කාලය (තත්පර) පිළිබඳ තොරතුරු දැක්වෙන සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියකි.

ඇමතුම් කාලය (තත්පර)	ග්‍රාහකයින් ගණන
0 − 30	6
30 − 60	10
60 − 90	12
90 − 120	6
120 − 150	4
150 − 180	2

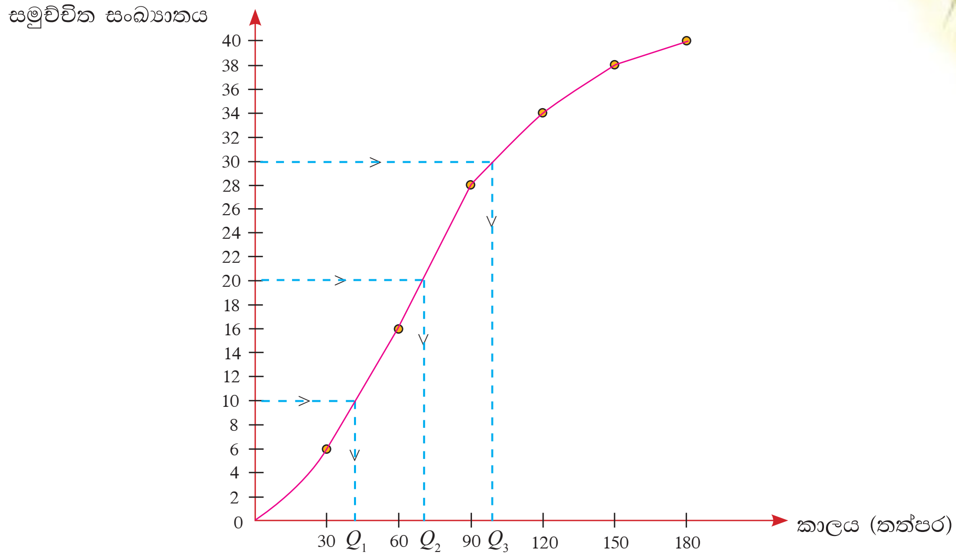
මෙවැනි සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියක සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් පිළියෙළ කිරීම පිළිබඳ ව ඔබ දැනටමත් උගෙන ඇත. ඒ අනුව එක් වගුව පිළියෙල කිරීමෙන් පසුව පහත දැක්වෙන පරිදි සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇඳීමට සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් පිළියෙල කරමු.

ඇමතුම් කාලය (තත්පර)	ග්‍රාහකයින් ගණන (f)	සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය
0 − 30	6	6
30 − 60	10	16
60 − 90	12	28
90 − 120	6	34
120 − 150	4	38
150 − 180	2	40

සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇඳීම සඳහා ගනු ලබන පටිපාටිගත යුගල කුලකය පහත පරිදි වේ.

(30, 6) (60, 16) (90, 28) (120, 34) (150, 38) (180, 40)

මෙම පටිපාටිගත යුගල පහත දැක්වෙන පරිදි ඛණ්ඩාංක තලයක ලකුණු කර සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳිමු.



ඉහත පරිදි සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇඳීමෙන් අනතුරු ව පහත ගණනය කිරීම් කරමු.

පළමු චතුර්ථකය සෙවීමට, මුළු දත්ත ගණන 4න් බෙදන්න.

$$Q_1 \text{ පිහිටීම } = \frac{1}{4}\, n = \frac{1}{4} \times 40 = 10 \text{ වෙනි අය ගණන පිහිටන ස්ථානයයි.}$$

10 වෙනි අය ගණන පිහිටන ස්ථානය සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇසුරෙන් සොයා ගනිමු. ඉහත ලකුණු කර ඇති ආකාරයට පළමු චතුර්ථක අගය 30 – 60 අතර අගයක් වනු ඇත. එම අගය ආසන්න ලෙස 42 වැනි අගයකි. ඒ අනුව $Q_1 \approx 42$ වේ.

දැන් දෙවන චතුර්ථකයේ පිහිටීම සෙවීමට මුළු දත්ත ගණන 2න් බෙදන්න.

$$Q_2 \text{ පිහිටීම } = \frac{1}{2}\, n = \frac{1}{2} \times 40 = 20 \text{ වෙනි අය ගණන පිහිටන ස්ථානය}$$

20 වෙනි අය ගණන පිහිටන ස්ථානය සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇසුරෙන් සොයා ගනිමු.

ඉහත ලකුණු කර ඇති ආකාරයට දෙවන චතුර්ථකයේ අගය 60 – 90 අතර අගයක් වනු ඇත. එම අගය ආසන්න ලෙස 71 වැනි අගයකි. ඒ අනුව $Q_2 \approx 71$ වේ.

දැන් තුන්වන චතුර්ථකයේ පිහිටීම සෙවීමට, දත්ත ගණන 4න් බෙදා 3න් ගුණ කරමු.

$$Q_3 \text{ පිහිටීම } = \frac{3}{4}\, n = \frac{3}{4} \times 40 = 30 \text{ වෙනි අය ගණන පිහිටන ස්ථානය}$$

30 වෙනි අය ගණන පිහිටන ස්ථානය සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය මගින් සොයා ගනිමු. ඉහත ලකුණු කර ඇති ආකාරයට තුන්වන චතුර්ථකයේ අගය 90 – 120 අතර අගයක් වනු ඇත. එම අගය ආසන්න ලෙස 103 වැනි අගයකි. ඒ අනුව $Q_3 \approx 103$ වේ.

ඉහත ආකාරයට චතුර්ථක සෙවීමෙන් අනතුරුව අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සෙවිය හැකි ය. ඒ සඳහා තුන්වන චතුර්ථකයට ලැබුණු පිළිතුරෙන් පළමු චතුර්ථකයට ලැබුණු පිළිතුර අඩු කළ යුතු යි.

අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය = තුන්වන චතුර්ථකය − පළමු චතුර්ථකය

$$= Q_3 - Q_1$$

$$= 103 - 42$$

$$= 61$$

සටහන

සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියේ දත්ත ගණන 30 හෝ ඊට වැඩි නම් චතුර්ථක ගණනය කිරීමට $n + 1$ වෙනුවට n භාවිත කරයි.

ඒ අනුව සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය භාවිතයෙන් චතුර්ථක ගණනය කිරීම සඳහා පහත දී ඇති සම්බන්ධතා භාවිත කළ යුතු වේ.

පළමු චතුර්ථකයේ පිහිටීම $= \dfrac{\text{මුළු දත්ත ගණන}}{4} \qquad = \dfrac{n}{4}$

දෙවන චතුර්ථකයේ පිහිටීම $= \dfrac{\text{මුළු දත්ත ගණන}}{2} \qquad = \dfrac{n}{2}$

තුන්වන චතුර්ථකයේ පිහිටීම $= \dfrac{\text{මුළු දත්ත ගණන}}{4} \times 3 \qquad = \dfrac{n}{4} \times 3$

$$= \frac{3n}{4}$$

ඉහත සම්බන්ධතා මගින් චතුර්ථක සෙවීමෙන් පසුව අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සෙවීම සඳහා පහත සම්බන්ධය යොදා ගනු ලැබේ.

අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය = තුන්වන චතුර්ථකය − පළමු චතුර්ථකය

$$= Q_3 - Q_1$$

16.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙනුයේ දහම් පාසැල් සිසුන් 15 දෙනෙකු විසින් ගෙන ආ මල් වට්ටිවල තිබූ මල් ගණන පිළිබඳ තොරතුරු ඇතුළත් සංඛ්‍යා වැලකි.

   20, 15, 12, 20, 25, 16, 18, 13, 28, 30, 35, 10, 41, 32, 45

   මෙම දත්ත සමූහයේ,

   (i) මධ්‍යස්ථය සොයන්න. (ii) පළමු චතුර්ථකය සොයන්න.

   (iii) තුන්වන චතුර්ථකය සොයන්න. (iv) අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

2. එක්තරා පිරිවෙණක 5 ශ්‍රේණියේ සිසුන් 9 දෙනෙකු අවසාන වාර පරීක්ෂණයේ දී ගණිතය සඳහා ලබා ගත් ලකුණු පහත දැක්වේ.

26, 42, 63, 25, 54, 75, 48, 35, 27

මෙම ලකුණුවල,

(i) මධ්‍යස්ථය සොයන්න.

(ii) පළමු වන චතුර්ථකය සොයන්න.

(iii) තුන්වන චතුර්ථකය සොයන්න.

(iv) අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

3. එක්තරා දිනයක් තුළ ගමක නිවාස 23ක් භාවිත කර තිබූ ජල ඒකක ගණන පහත දැක්වේ.

ජල ඒකක ගණන	1	2	3	4	5	6	7
නිවාස ගණන	4	6	3	6	2	1	1

මෙම දත්ත සමූහයේ

(i) මධ්‍යස්ථය සොයන්න.

(ii) පළමු වන චතුර්ථකය සොයන්න.

(iii) තුන්වන චතුර්ථකය සොයන්න.

(iv) අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

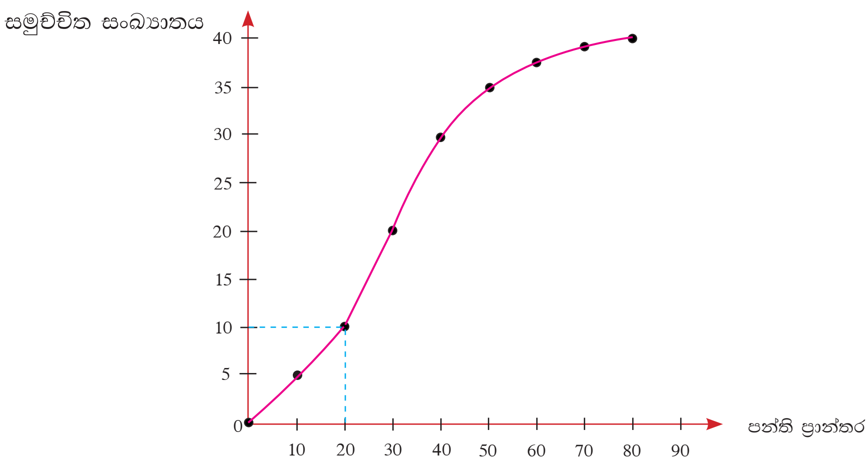
4. පහත දී ඇති සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය භාවිත කර අසා ඇති ප්‍රශ්නවල හිස්තැන් පුරවන්න.

(i) මධ්‍යස්ථය $= \frac{n}{2} =$ .... $=$ .... වෙනි අය ගණන $\therefore\ Q_2 =$ ....

(ii) පළමු චතුර්ථකය $= \frac{n}{4} =$ .... $=$ .... වෙනි අය ගණන $\therefore\ Q_1 =$ ....

(iii) තුන්වන චතුර්ථකය $= \frac{n}{4} \times 3$ .... $=$ .... වෙනි අය ගණන $\therefore\ Q_3 =$ ....

(iv) අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය $= Q_3 - Q_1 =$ .... $=$ ....



5. පහත දැක්වෙනුයේ එක්තරා රෝහලක පැවති අක්ෂි සායනයක් සඳහා සහභාගි වූවන්ගේ වයස (අවුරුදු) හා සහභාගි වූ පිරිස දැක්වෙන සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියකි.

වයස (අවුරුදු)	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100
සහභාගි වූ ගණන	07	13	20	30	15	10	3	2

(i) ඉහත තොරතුරු දැක්වීමට සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් පිළියෙල කරන්න.
(ii) එමගින් සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින්න.
(iii) චතුර්ථක සඳහා ලැබෙන අගයන් සොයන්න.
(iv) අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

සාරාංශය

- දත්ත වැලක් සඳහා මාතය, මධ්‍යස්ථය, මධ්‍යන්‍යයට අමතර ව පළමු හා තුන්වන චතුර්ථක සෙවිය හැකි ය.
- කුඩා දත්ත වැලක් දී ඇති විට පළමු ව මධ්‍යස්ථය සොයා ඉන්පසුව මධ්‍යස්ථ අගයෙන් වම් පැත්තේ ඇති අය ගණනවල මධ්‍යස්ථය සෙවීමෙන් පළමු චතුර්ථකය සෙවිය හැකි ය. මධ්‍යස්ථ අගයෙන් දකුණු පැත්තේ ඇති අය ගණන්වල මධ්‍යස්ථයෙන් තුන්වන චතුර්ථකය සෙවිය හැකි ය.
- සමුහිත සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියක සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇඳීමෙන් ද චතුර්ථක සෙවිය හැකි ය.
- පළමු චතුර්ථකය සෙවීමට මුළු දත්ත ගණන 4න් බෙදා ඊට අනුරූප පිහිටීම සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රයෙන් ලබා ගත හැකි ය.
- දෙවන චතුර්ථකය සෙවීමට මුළු දත්ත ගණන 2න් බෙදා ඊට අනුරූප පිහිටීම සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රයෙන් ලබා ගත හැකි ය.
- තුන්වන චතුර්ථකය සෙවීමට මුළු දත්ත ගණන 4න් බෙදා, 3න් ගුණ කළ යුතු යි. ඊට අනුරූප පිහිටීම සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රයෙන් ලබා ගත හැකි ය.
- ඕනෑ ම සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියක තුන්වන චතුර්ථකයෙන් පළමු චතුර්ථකය අඩු කළ විට අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය ලැබේ.

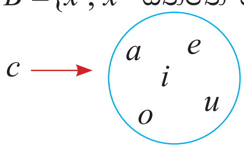
17 කුලක

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- කුලක 3ක් සම්බන්ධ වූ විට වෙන් රූප සටහන් ඇඳීමට,
- කුලක 3ක් සම්බන්ධ වෙන් රූප සටහන්වල ප්‍රදේශ හඳුනා ගැනීමට,
- කුලක 3ක් සම්බන්ධ ගැටලු විසඳීමට වෙන් රූප භාවිත කිරීමට

හැකියාව ලැබේ.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. පහත සඳහන් එක් එක් සමූහය මගින් කුලකයක් නිරූපණය වන සමූහ තෝරා ලියන්න.
   (i) බෞද්ධ කොඩියේ පාට
   (ii) ගණින සංඛ්‍යා
   (iii) ලස්සන මල්
   (iv) රෝස පාට මල්
   (v) ගණිතයට දක්ෂ සිසුන්
   (vi) අවසන් වාර විභාගයේ දී ගණිතයට ලකුණු 50ට වැඩියෙන් ලබා ගත් සිසුන්
   (vii) උස ගස්

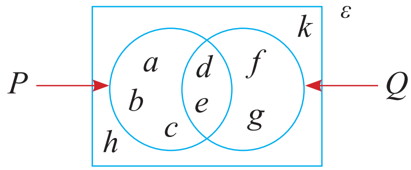
2. පහත දැක්වෙන එක් එක් කුලකය වෙනත් කුලක අංකන ක්‍රමයකින් ලියන්න.
   (i) $A = \{$0ත් 10ත් අතර ගණින සංඛ්‍යා$\}$
   (ii) $B = \{x\,;\,x$ ඔත්තේ සංඛ්‍යාවකි. $20 < x < 30\}$
   (iii) 

   (iv) $D = \{$දේදුන්නේ පාට$\}$
   (v) $E = \{\,x\,;\,x$ ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවකි. $0 < x < 20\}$
   (vi) $F = \{$'*POLONNARUWA*' යන වචනයේ අකුරු$\}$

3. පහත දී ඇති කුලක වෙන් රූප සටහනක දක්වන්න.
   (i) $\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
   (ii) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
   (iii) $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

4. දී ඇති වෙන් රූපය ඇසුරින් පහත අසා ඇති ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න.

(i) P කුලකය ලියා දක්වන්න.
(ii) $(P\cap Q)$ කුලකය ලියා දක්වන්න.
(iii) $(P\cup Q)'$ කුලකය ලියා දක්වන්න.
(iv) $n(P\cap Q)$ සොයන්න.
(v) $P\cap Q'$ කුලකය ලියා දක්වන්න.
(vi) $n\,(P\cap Q)'$ සොයන්න.

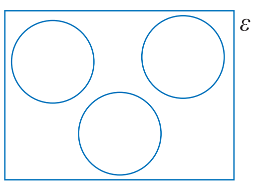


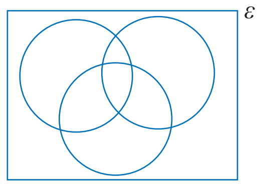
5. බස් රථයක පැමිණි මගීන් 40 දෙනෙකු පිළිබඳ කරන ලද සමීකරණයක දී ලැබුණු තොරතුරු පහත දැක්වේ.
මගීන් 25 දෙනෙකු ළඟ කුඩ තිබූ අතර, එයින් 18 දෙනෙකු කාන්තාවන් වේ. කුඩ නැති පිරිමි සංඛ්‍යාව 10 වේ.

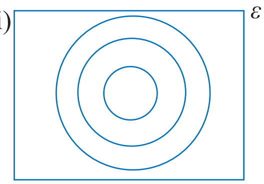
(i) ඉහත තොරතුරු වෙන් රූප සටහනක දක්වන්න.
(ii) මෙම බස් රථයේ පැමිණි
  (*a*) පිරිමි සංඛ්‍යාව කීය ද?
  (*b*) කාන්තාවන් සංඛ්‍යාව කීය ද?
(iii) කුඩ තිබූ පිරිමි සංඛ්‍යාව කීය ද?

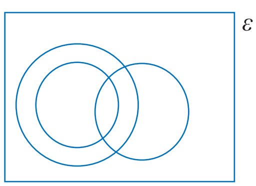
17. 1 කුලක 3ක් ඇතුළත් අවස්ථාවල වෙන් රූප සටහන්

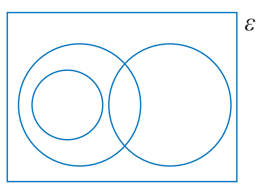
දැන් අපි කුලක තුනක් සම්බන්ධ තොරතුරු පිළිබඳ අධ්‍යයනය කරමු. කුලක තුනක් වෙන් රූපයක දැක්විය හැකි ආකාර කිහිපයක් පහත දැක්වේ. (ii) රූපය මගින් නිරූපණය වන්නේ කුලක තුන පිහිටීමේ වඩාත් සාධාරණ ආකාරයයි.

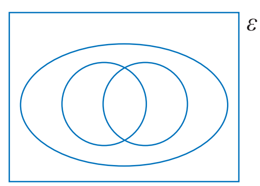
(i)


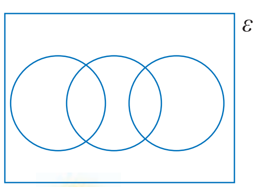
(ii)


(iii)


(iv)


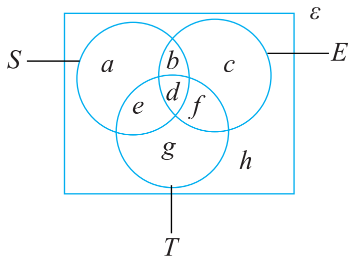
(v)


(vi)


(vii)


17.2 කුලක 3ක් නිරූපිත වෙන් රූපයක ලකුණු කර ඇති ප්‍රදේශ වචනයෙන් විස්තර කිරීම

බස් රියක සිටි මගීන් අතර විවිධ භාෂා කථා කරන මගීන් පිළිබඳ ව ලබා ගත් තොරතුරු ඇතුළත් වෙන් රූප සටහනක් මෙසේ ය.



ε = {බස් රියක මගීන්}
S = {බස් රියේ සිංහල කථා කරන මගීන්}
E = {බස් රියේ ඉංග්‍රීසි කථා කරන මගීන්}
T = {බස් රියේ දෙමළ කථා කරන මගීන්}

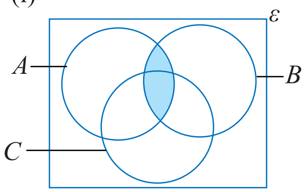
එහි a, b, c, d, e, f, g, h මගින් ප්‍රදේශ නම් කර ඇතැයි සිතමු.
ඉහත කුලකයේ ඉංග්‍රීසි සිම්පල් අකුරුවලින් නම් කළ ප්‍රදේශ වචනයෙන් විස්තර කරමු.

ප්‍රදේශය	විස්තරය
a	සිංහල පමණක් කථා කරන මගීන්
b	සිංහල හා ඉංග්‍රීසි පමණක් කථා කරන මගීන්
c	ඉංග්‍රීසි පමණක් කථා කරන මගීන්
d	සිංහල, ඉංග්‍රීසි හා දෙමළ භාෂා 3ම කථා කරන මගීන්
b, d	සිංහල හා ඉංග්‍රීසි කථා කරන අය
d, f	ඉංග්‍රීසි හා දෙමළ කථා කරන අය
e, d	සිංහල හා දෙමළ කථා කරන අය
h	ඉහත භාෂා 3න් එකක්වත් කථා නොකරන අය
a, c, g	ඉහත එක් භාෂාවක් පමණක් කථා කරන අය
b, e, f	භාෂා 2ක් පමණක් කථා කරන අය
b, e, f, d	ඉහත භාෂාවලින් යටත් පිරිසෙන් 2ක් වත් කථා කරන අය
a, b, c, d, e, f, g	ඉහත එක් භාෂාවක් හෝ කථා කරන අය

17. 3 කුලක 3ක් නිරූපිත වෙන් රූපයක ප්‍රදේශ කුලක අංකනයෙන් දැක්වීම

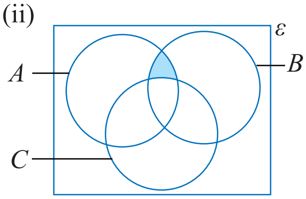
A, B, C කුලක සලකමු.

(i)



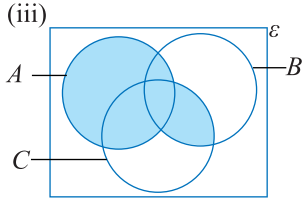
$A \cap B$

(ii)



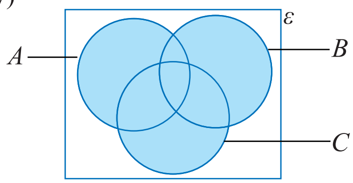
$(A \cap B) \cap C'$

(iii)



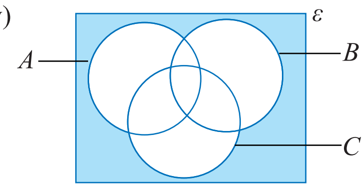
$A \cup (B \cap C)$

(iv)



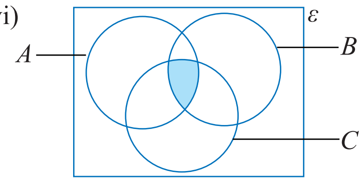
$A \cup B \cup C$

(v)



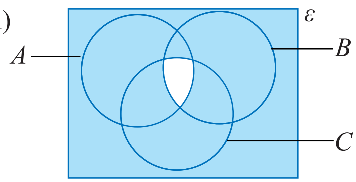
$(A \cup B \cup C)'$

(vi)



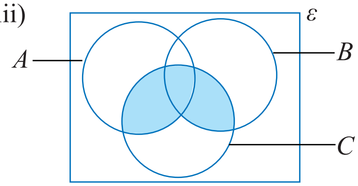
$(A \cap B \cap C)$

(vii)



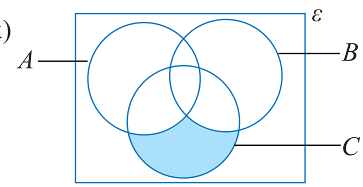
$(A \cap B \cap C)'$

(viii)



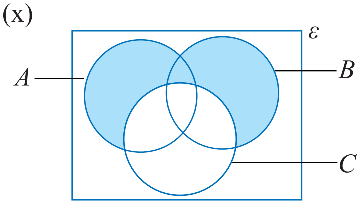
$(A \cup B) \cap C$

(ix)



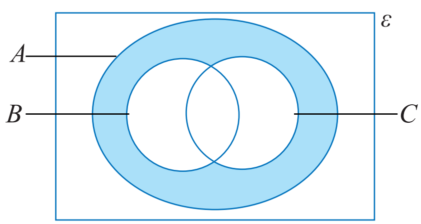
$(A \cup B)' \cap C$

(x)



$(A \cup B) \cap C'$

(xi)



$B \subset A$ හා $C \subset A$ විට $(B \cup C)' \cap A$

17.4 කුලක වීජය

A හා B කුලක දෙකක් නම් පහත දී ඇති නියමයන් සත්‍ය වේ.

- ⋆ $A \cup B = B \cup A$
- ⋆ $A \cap B = B \cap C$
- ⋆ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- ⋆ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- ⋆ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- ⋆ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- ⋆ $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- ⋆ $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- ⋆ $A \cup A' = \varepsilon$
- ⋆ $A \cap A' = \varnothing$, මෙහි $\varnothing$ යනු අභිශූන්‍ය කුලකය වේ.

17.1 අභ්‍යාසය

1. වෙන් රූප සටහන් මගින්,

   (i) $A \cap B = B \cap A$ බව පෙන්වන්න. (ii) $A \cup B = B \cup A$ බව පෙන්වන්න.

   (iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

2. පහත සඳහන් ප්‍රකාශවලින් කවරක් සත්‍ය වේ ද අසත්‍ය වේ ද යන්න ලියා දක්වන්න.

   (i) $P \cup P' = \varepsilon$ (ii) $P \cap P' = \varnothing$ (iii) $A \subset A$ (iv) $\varepsilon \subset \varnothing$

   (v) $\varepsilon \cup A = A$ (vi) $\varepsilon \cup \varnothing = \varepsilon$ (vii) $n(\varnothing) = o$

3. දී ඇති තොරතුරු අනුව පහත සඳහන් එක් එක් ඒවාට අයත් අවයව ලියා දක්වන්න.

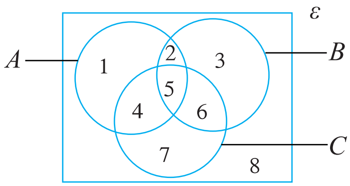
   $\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
   $P = \{2, 3, 5, 7\}$
   $Q = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
   $R = \{2, 3, 5, 6, 8,\}$ බව දී ඇත.

   (i) $P \cup Q$ (ii) $P \cap Q$ (iii) $Q \cup R$ (iv) $P \cup Q \cup R$

   (v) $P \cap Q \cap R$ (vi) $(P \cup Q \cup R)'$ (vii) $(P \cup Q) \cap R$ (viii) $(P \cup Q)'$

   (ix) $(Q \cup R)'$ (x) $(P \cup Q)' \cap R$ (xi) $n(\varepsilon)$ (xii) $n(P \cap Q \cap R)$

4.



(*a*) දී ඇති වෙන් රූපය ඇසුරෙන් පහත එක් එක් ඒවාට අයත් අවයව ලියා දක්වන්න.

(i) A (ii) $(A\cap B)$ (iii) $A\cup B$ (iv) $A\cup B\cup C$

(v) $A\cap B\cap C$ (vi) $(B\cup C)'\cap A$ (vii) $(A\cup B\cup C)'$

(*b*) (i) $n(B)$ සොයන්න. (ii) $n[(A\cup B)\cap C]$ සොයන්න.

(iii) $n(A')$ සොයන්න.

5. A, B, C, කුලක තුනක් නම් පහත දැක්වෙන එක් එක් කුලකය නිරූපණය වන පෙදෙස වෙන වෙන ම වෙන් රූප සටහනක අඳුරු කර දක්වන්න.

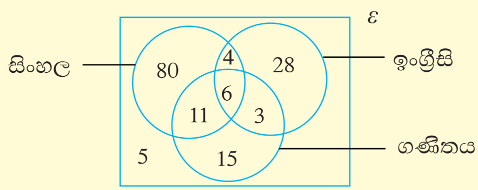
(i) $(B\cup C)\cap A$ (ii) $(A\cup C)'\cap B$ (iii) $(B\cup C)\cap A'$

(iv) $A\cap(B\cap C)'$ (v) $A'\cap B'\cap C'$

17. 5 කුලක 3කින් නිරූපණය වන වෙන් රූප ආශ්‍රිත ගැටලු

නිදසුන 1

එක්තරා දිස්ත්‍රික්කයක පිරිවෙන් අවසාන විභාගයට පෙනී සිටි ශිෂ්‍ය හිමිවරු අතුරින් සිංහල, ඉංග්‍රීසි හා ගණිතය සමත් සංඛ්‍යාව පිළිබඳ තොරතුරු පහත වෙන් රූපයේ දැක්වේ.



අදාළ තොරතුරු අනුව,

(i) සිංහල පමණක් සමත් සංඛ්‍යාව කීය ද? = 80

(ii) ඉංග්‍රීසි සමත් සංඛ්‍යාව කීය ද? = 4 + 6 + 3 +28= 41

(iii) ගණිතය අසමත් සංඛ්‍යාව කීය ද? = 80 + 4 + 28 + 5 = 117

(iv) විෂයන් තුන ම සමත් සංඛ්‍යාව කීය ද? = 6

(v) විෂයන් තුන ම අසමත් සංඛ්‍යාව කීය ද? = 5

(vi) එක් විෂයක් පමණක් සමත් සංඛ්‍යාව කීය ද? = 80 + 28 + 15 = 123

(vii) සිංහල හා ඉංග්‍රීසි සමත් සංඛ්‍යාව කීය ද? = 6 + 4 = 10

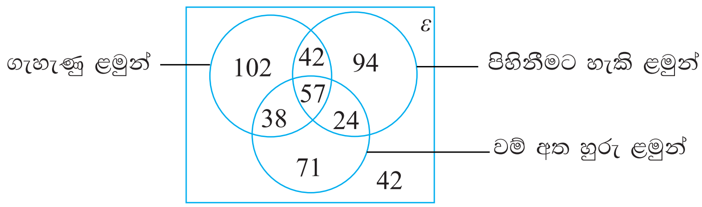
(viii) සිංහල හා ගණිතය පමණක් සමත් සංඛ්‍යාව කීය ද? = 11

(ix) විෂයන් 2ක් පමණක් සමත් සංඛ්‍යාව කීය ද? = 11 + 4 + 3 = 18

(x) යටත් පිරිසෙන් විෂයන් 2ක් වත් සමත් සංඛ්‍යාව කීය ද? = 11 + 4 + 3 + 6 = 24

17.2 අභ්‍යාසය

1. මිශ්‍ර පාසලක සිසුන් කණ්ඩායමක් පිළිබඳ ව කරන ලද සමීක්ෂණයක දී ලැබුණු තොරතුරු පහත වෙන් රූප සටහනෙන් දැක්වේ.



ඉහත වෙන් රූප සටහනේ දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරින් පහත ප්‍රශ්න සඳහා පිළිතුරු සපයන්න.

(i) වම් අත හුරු ළමුන් ගණන කොපමණ ද?
(ii) පිහිනීමට නොහැකි ගැහැණු ළමයි ගණන කොපමණ ද?
(iii) පිහිනීමට හැකි පිරිමි ළමයි ගණන කීය ද?
(iv) වම් අත හුරු පිරිමි ළමයි ගණන කොපමණ ද?
(v) මුළු පිරිමි ළමයින් ගණන කීය ද?

2. $n(\varepsilon) = 160$ ද $n(A) = 67$ ද $n(B) = 35$ ද $n(C) = 40$ ද $n(A\cap B\cap C) = 10$ ද $n(A\cap B) = 15$ ද $n(A\cap C) = 12$ ද $n(B\cap C) = 12$ ද නම් වෙන් රූපයක් ඇසුරෙන්,

(i) $n\,(A\cup B\cup C)$ (ii) $n\{(A\cup B)\cap C\}$ (iii) $n\{(A\cup B)'\cap C\}$ සොයන්න.

3. ස.තො.ස වෙළෙඳ සැලකින් එක් පාරිභෝගිකයකුට වරකට නිකුත් කරන්නේ කිරිපිටි, පරිප්පු හා සීනි යන මේවායින් එක් පැකට්ටුවක් බැගින් පමණි. එක් දිනක පිටි පැකට් 80ක් ද පරිප්පු පැකට් 110ක් ද සීනි පැකට් 100ක් ද විකුණා ඇති බව දක්නට ලැබුණි. පරිප්පු හා සීනි මිල දී ගත් අය 50ක් ද සීනි හා කිරිපිටි මිල දී ගත් අය 45ක් ද කිරිපිටි හා පරිප්පු මිල දී ගත් අය 55ක් ද කිරිපිටි, පරිප්පු හා සීනි මිල දී ගත් අය 30ක් ද වන බව සොයා ගන්නා ලදී. එදින ස.තො.ස වෙළඳසැල වෙත පැමිණි සියලුම පාරිභෝගිකයින් ඉහත ද්‍රව්‍ය තුනෙන් එක් ද්‍රව්‍යයක්වත් මිල දී ගෙන ඇත.

$A =$ {කිරි පිටි මිල දී ගත් අය} $B =$ {පරිප්පු මිල දී ගත් අය}
$C =$ {සීනි මිල දී ගත් අය} ද වේ නම්,

(i) $n(A)$ (ii) $n(B)$ (iii) $n(C)$ (iv) $n(B\cap C)$
(v) $n\,(A\cap C)$ (vi) $n(A\cap B)$ (vii) $n(A\cap B\cap C)$ (viii) $n\{(A\cup B')\cap C$
සොයන්න.

4. ක්‍රීඩා සමාජයක සාමාජිකයන් 40ක් සිටිති. මෙහි ක්‍රිකට්, බේස්බෝල් හා වොලිබෝල් යන ක්‍රීඩා සඳහා පහසුකම් ඇත. සෑම සාමාජිකයෙක් ම යටත් පිරිසෙන් මින් එක් ක්‍රීඩාවකවත් යෙදෙයි. බේස්බෝල් ක්‍රීඩාවේ යෙදෙන මුළු ගණන 20කි. ක්‍රිකට් ක්‍රීඩාවේ යෙදෙන මුළු ගණන 26කි. සාමාජිකයන් 12 දෙනෙක් ක්‍රීඩා 3ට ම සහභාගි වෙති. වොලිබෝල් ක්‍රීඩා කරන අයගෙන් 17 දෙනෙක් ක්‍රිකට් ක්‍රීඩා කරති. ක්‍රිකට් පමණක් ක්‍රීඩා කරන අය 6 දෙනෙකි. බේස්බෝල් ක්‍රීඩා කරන අයගෙන් 13 දෙනෙක් වොලිබෝල් ක්‍රීඩා කරති. මේ දත්තයන් සුදුසු වෙන් රූපයක් මගින් දක්වන්න. එමගින්,

(i) වොලිබෝල් ක්‍රීඩාවේ පමණක් යෙදෙන සංඛ්‍යාව කීය ද?
(ii) වොලිබෝල් හා ක්‍රිකට් ක්‍රීඩාවේ පමණක් යෙදෙන සංඛ්‍යාව කීය ද?
(iii) ඉහත එක් ක්‍රීඩාවකට පමණක් සහභාගි වන සංඛ්‍යාව කීය ද?
(iv) යටත් පිරිසෙන් ක්‍රීඩා 2කට වත් සහභාගි වන අය කොපමණ ද?

5. පිරිවෙණක ශිෂ්‍ය හිමිවරු 60 නමක් අතරින් පුවත්පත් කියවීමට, නවකථා කියවීමට හෝ පරිගණක භාවිතයට කැමැති අය පිළිබඳ ව කරන ලද සමීක්ෂණයක දී 12 දෙනෙක් පරිගණක භාවිතයට පමණක් කැමැති බව ද 15 දෙනෙක් පරිගණක භාවිතයට හා පුවත්පත් කියවීමට කැමැති බව ද සොයා ගන්නා ලදී. පුවත්පත් කියවීමට හා නවකථා කියවීමට කැමැති 9 දෙනෙක් වූ අතර ඔවුන්ගේ 4 දෙනෙක් පරිගණක භාවිතයට අකමැති ය. 31 දෙනෙක් පුවත්පත් කියවීමට ද, 25 දෙනෙක් නවකථා කියවීමට ද කැමැති ය. 7 දෙනෙක් නවකථා කියවීමට පමණක් ප්‍රිය කරයි. මේ සඳහා වෙන් රූපයක් අඳින්න.

(i) පුවත්පත් පමණක් කියවන අය කී දෙනා ද?
(ii) පරිගණක භාවිතයට හා නවකථා කියවීමට පමණක් කැමති ගණන කීය ද?
(iii) පුවත්පත් හා පරිගණක භාවිතයට පමණක් කැමති ගණන කීය ද?
(iv) ඉහත එක් වර්ගයකට පමණක් කැමති ගණන කීය ද?
(v) ඉහත එක් වර්ගයකටවත් අකමැති හිමිවරු ගණන කීය ද?

6. සංචාරක බස් රථයක සිටි 50 දෙනෙකු අතරින් ප්‍රංශ, ජර්මන් හා ඉංග්‍රීසි කථා කරන අය පිළිබඳ ව කරන ලද පරීක්ෂණයක දී පහත තොරතුරු ලැබුණි. ප්‍රංශ භාෂාව කථා කරන සංඛ්‍යාව 22 කි. 21 දෙනෙක් ජර්මන් භාෂාව කථා කළහ. ප්‍රංශ හා ජර්මන් භාෂා කථා කළ සංඛ්‍යාව 10ක් වන අතර ජර්මන් හා ඉංග්‍රීසි භාෂාව කථා කළ සංඛ්‍යාව 9කි. 6 දෙනෙකු මෙම භාෂා තුන ම කථා කළ අතර එමෙන් දෙගුණයක් භාෂා 2ක් පමණක් කථා කළහ. මෙම භාෂා එකක්වත් කථා නොකළ සංඛ්‍යාව 8කි. මෙම තොරතුරු වෙන් රූපයක දක්වන්න. එමගින්,

(i) ප්‍රංශ හා ඉංග්‍රීසි භාෂා කථා කරන සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(ii) ජර්මන් භාෂාව පමණක් කථා කරන සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(iii) ඉංග්‍රීසි භාෂාව කථා කරන අය කීදෙනා ද?
(iv) ඉංග්‍රීසි භාෂාව කථා නොකරන සංඛ්‍යාව කීය ද?
(v) යටත් පිරිසෙන් භාෂා 2ක් වත් කථා කරන සංඛ්‍යාව කීය ද?

7. අධ්‍යාපන ප්‍රදර්ශනයක් නැරඹීමට පැයක් තුළ පැමිණි පුද්ගලයන්ගෙන් ගණිත කුටිය නැරඹීමට 48 දෙනෙක් ද විද්‍යා කුටිය නැරඹීමට 12 දෙනෙක් ද තාක්ෂණ කුටිය නැරඹීමට 20 දෙනෙක් ද පැමිණියහ. විද්‍යා කුටිය නැරඹූ සියලු දෙනාම ගණිත කුටිය නැරඹූහ. ගණිත කුටිය නරඹා තාක්ෂණ කුටිය පමණක් නැරඹූ පිරිස 11කි. විද්‍යා, තාක්ෂණ හා ගණිත යන කුටි 3ම නැරඹූ පිරිස 4කි. පැමිණි පුද්ගලයන්ගෙන් 7 දෙනෙකු ඉහත එක් කුටියක්වත් නරඹා තිබුනේ නැත.

(i) තාක්ෂණ කුටිය පමණක් නැරඹූ පිරිස කීය ද?
(ii) විද්‍යා හා ගණිත කුටි පමණක් නැරඹූ පිරිස කීය ද?
(iii) ගණිත හා තාක්ෂණ කුටි පමණක් නැරඹූ පිරිස දැක්වෙන පෙදෙස වෙන් රූපයේ අඳුරු කර දක්වන්න.
(iv) එම පැය තුළ ප්‍රදර්ශනය නැරඹීමට පැමිණි පුද්ගලයින් ගණන කීය ද?

18 සම්භාවිතාව

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- ස්වායත්ත හා පරායත්ත සිද්ධි වෙන් කොට හඳුනා ගැනීමට,
- ස්වායත්ත සිද්ධි අවස්ථා දෙකකින් යුත් සසම්භාවී පරීක්ෂණ රුක් සටහන් මගින් නිරූපණය කර ගැටලු විසඳීමට,
- පරායත්ත සිද්ධි අවස්ථා දෙකකින් යුත් සසම්භාවී පරීක්ෂණ රුක් සටහන් මගින් නිරූපණය කර ගැටලු විසඳීමට

හැකියාව ලැබේ.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. 1 සිට 4 දක්වා අංක යොදන ලද නොනැඹුරු චතුස්තලාකාර දාදු කැටයක් උඩ දැමීමේ පරීක්ෂණය සලකන්න.

(i) මෙම පරීක්ෂණයේ නියැදි අවකාශය ලියා දක්වන්න.

(ii) X යනු අංක 3 වැටීමේ සිද්ධිය ද
Y යනු ඉරට්ට සංඛ්‍යාවක් වැටීමේ සිද්ධිය ද
Z යනු ඔත්තේ සංඛ්‍යාවක් වැටීමේ සිද්ධිය ද නම් මෙම එක් එක් සිද්ධියට අදාළ ප්‍රතිඵල කුලකය ලියා දක්වන්න.

(iii) මෙහි ඇති සරල සිද්ධිය කුමක් ද?

(iv) මෙහි ඇති සංයුක්ත සිද්ධියක් නම් කරන්න.

(v) අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි දෙකක් නම් කරන්න.

(vi) අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර නොවන සිද්ධි දෙකක් නම් කරන්න.

(vii) X සිද්ධියේ සම්භාවිතාව කීය ද?

(viii) X හි අනුපූරක සිද්ධිය හෙවත් අංක 3 හැර වෙනත් සංඛ්‍යාවක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

18.1 ස්වායත්ත සිද්ධි

එක් සිද්ධියක සිදුවීම හෝ සිදු නොවීම තවත් සිද්ධියක සිදු වීම හෝ සිදු නොවීම කෙරෙහි බල නොපායි නම්, එම සිද්ධි දෙක ස්වායත්ත සිද්ධි දෙකක් ලෙස හඳුන්වයි.
A හා B ස්වායත්ත සිද්ධි දෙකක් නම්,

$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$ වේ.

නිදසුන 1

කාසියක් සහ 1 සිට 6 තෙක් අංක යොදන ලද නොනැඹුරු ඝනකාකාර දාදු කැටයක් එකවර උඩ දමනු ලැබේ. මෙහි දී කාසියේ වැටෙන පැත්ත දාදු කැටයේ වැටෙන පැත්ත කෙරෙහි බලපෑම් ඇති නොකරයි. එනිසා මෙම සිද්ධි දෙක ස්වායත්ත සිද්ධි වේ.

නිදසුන 2

මල්ලක් තුළ සුදු පාට පබළු 3ක් සහ කළු පාට පබළු 5ක් ඇත. ළමයෙකු අහඹු ලෙස මල්ලෙන් පබළුවක් ගෙන එහි වර්ණය සටහන් කර නැවත ආපසු දමා තවත් වරක් පබළුවක් ඉවතට ගෙන එහි වර්ණය සටහන් කර ගනී. මෙම අවස්ථාවේදී පළමුවර ලැබෙන පබළුවේ වර්ණය දෙවනවර ලැබෙන පබළුවේ වර්ණය කෙරෙහි බලපෑමක් ඇති නොකරයි. එනම් මෙම සිද්ධි දෙක ස්වායත්ත සිද්ධි වේ.

18 .2 පරායත්ත සිද්ධි

සසම්භාවී පරීක්ෂණයකදී එක් සිද්ධියක සිදුවීම හෝ සිදු නොවීම තවත් සිද්ධියක සිදුවීම හෝ සිදු නොවීම කෙරෙහි බලපෑමක් ඇති කරයි නම් එම සිද්ධි දෙක පරායත්ත සිද්ධි ලෙස හඳුන්වයි. එනම්, එක් සිද්ධියක් සිදුවීම හෝ සිදු නොවීම මත අනෙක් සිද්ධිය සිදුවීම හෝ සිදු නොවීමේ සම්භාවිතාවයේ වෙනසක් ඇති වේ.

නිදසුන 1

එක්තරා පිරිවෙණක 5 ශ්‍රේණියේ සිසුන් 10ක් ඇත. මේ අය අතරින් පළමුව පන්ති නායකයා තෝරා ගන්නා අතර ඉන් පසුව ඉතිරි අයගෙන් උපනායකයා තෝරා ගනී. පන්ති නායකයා තෝරා ගැනීම උපනායකයා තෝරා ගැනීම කෙරෙහි බලපෑමක් ඇති කරයි. එනම් මෙම සිද්ධි දෙක පරායත්ත සිද්ධි වේ.

නිදසුන 2

මල්ලක් තුළ සුදු පාට පබළු 3ක් සහ කළු පාට පබළු 5ක් ඇත. ළමයෙකු අහඹු ලෙස මල්ලෙන් පබළුවක් ගෙන එහි වර්ණය සටහන් කර නැවත ආපසු නොදමා තවත් පබළුවක් ඉවතට ගෙන එහි වර්ණය සටහන් කරගනී. මෙම අවස්ථාවේදී පළමුවර ලැබෙන පබළුවේ වර්ණය දෙවනවර ලැබෙන පබළුවේ වර්ණය කෙරෙහි බලපෑමක් ඇති කරයි. එනම් මෙම සිද්ධි දෙක පරායත්ත සිද්ධි වේ.

18.1 අභ්‍යාසය

1. පහත සඳහන් සිද්ධි ස්වායත්ත සිද්ධි වේ ද පරායත්ත සිද්ධි වේ ද යන්න සඳහන් කරන්න.

   (i) A = {නිමල් සාමාන්‍ය පෙළ විභාගයේදී A සාමාර්ථ 9ක් ලබා ගැනීම}
   B = {අමල් සාමාන්‍ය පෙළ විභාගයේදී A සාමාර්ථ 9ක් ලබා ගැනීම}

   (ii) කාසි දෙකක් එකවර උඩ දැමූ විට,
   X= {පළමු කාසියේ සිරස ලැබීම}
   Y ={දෙවන කාසියේ සිරස ලැබීම}

(iii) නිල් පෑන් 3ක් හා කළු පෑන් 2ක් ඇති පෙට්ටියකින් එකකට පසු එකක් වශයෙන් ප්‍රතිස්ථාපන රහිතව පෑන් දෙකක් ඉවතට ගත් විට,

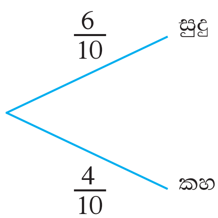
A= {පළමු පෑන නිල් පාට වීම}
B ={දෙවන පෑන නිල් පාට වීම}

(iv) මල්ලක අමු අඹ ගෙඩි 6ක් හා ඉදුණු අඹ ගෙඩි 4ක් ඇත. ළමයෙක් මෙම මල්ලෙන් අහඹු ලෙස ගෙඩියක් ඉවතට ගෙන ඉදී තිබේ නම්, කෑමට ගන්නා අතර අමු අඹ ගෙඩියක් නම් එය නැවත දමා වෙනත් අඹ ගෙඩියක් ගනී.

P = {පළමුවර අමු අඹ ගෙඩියක් ලැබීම}
Q ={දෙවනවර අමු අඹ ගෙඩියක් ලැබීම}

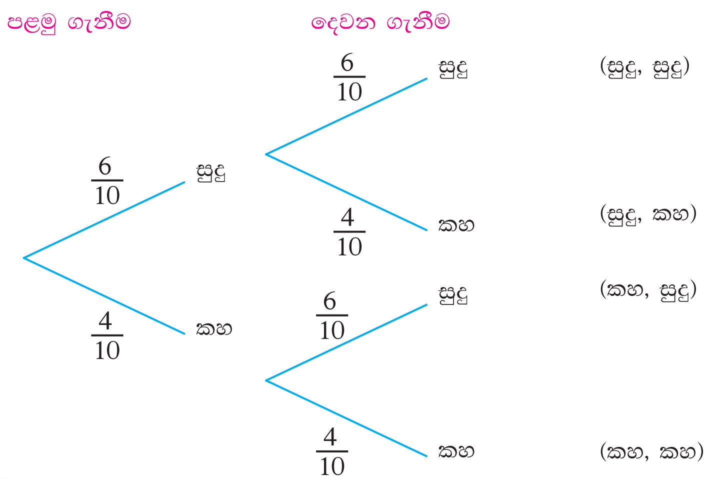
18.3 රුක් සටහන් භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීම (ස්වායත්ත සිද්ධි)

මල්ලක් තුළ සුදු පැහැති කාඩ්පත් 6ක් සහ කහ පැහැති කාඩ්පත් 4ක් ඇත. ළමයෙකු මින් අහඹු ලෙස කාඩ්පතක් ඉවතට ගනී. ලැබිය හැකි ප්‍රතිඵල රුක් සටහනක මෙසේ නිරූපණය කළ හැකි වේ.



මෙහිදී විය හැකි සිද්ධි දෙකක් පවතී.

ඔහු එම කාඩ්පත නැවත මල්ලට දමා අහඹු ලෙස තවත් කාඩ්පතක් ඉවතට ගනී. අවස්ථා දෙකේදී ම ලැබිය හැකි ප්‍රතිඵල නිරූපණය සඳහා ඔබ ඇඳි රුක් සටහන මෙලෙස දීර්ඝ කළ හැකි ය.



අවස්ථා දෙක ම සැලකිල්ලට ගැනීමේ දී මෙහි සිදුවීම් 4ක් ඇත.

- පළමු ගැනීම සුදු සහ දෙවන ගැනීම සුදු (සුදු, සුදු)
- පළමු ගැනීම සුදු සහ දෙවන ගැනීම කහ (සුදු, කහ)
- පළමු ගැනීම කහ සහ දෙවන ගැනීම සුදු (කහ, සුදු)
- පළමු ගැනීම කහ සහ දෙවන ගැනීම කහ (කහ, කහ)

ඉවතට ගත් කාඩ් පත් දෙක ම සුදු පාට කාඩ්පත් වීමේ සම්භාවිතාව

$$\frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{36}{100}$$

ඉවතට ගත් කාඩ් පත් දෙක ම කහ පාට කාඩ්පත් වීමේ සම්භාවිතාව

$$\frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{100}$$

ඉවතට ගත් පළමු කාඩ් පත සුදු පාට සහ දෙවන කාඩ්පත කහ පාට වීමේ සම්භාවිතාව

$$\frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{24}{100}$$

ඉවතට ගත් කාඩ් පත් දෙකෙන් එකක් සුදු පාට සහ අනෙක කහ පාට වීමේ සම්භාවිතාව

(සුදු, කහ) + (කහ, සුදු)

$$\left(\frac{6}{10} \times \frac{4}{10}\right) + \left(\frac{4}{10} \times \frac{6}{10}\right)$$

$$= \frac{24}{100} + \frac{24}{100}$$

$$= \frac{48}{100}$$

ඉවතට ගත් කාඩ් පත් දෙකෙන් අඩු තරමින් එක් කාඩ් පතක්වත් සුදු පාට කාඩ් පතක් වීමේ සම්භාවිතාව

(සුදු, සුදු) + (සුදු, කහ) (කහ, සුදු)

$$= \left(\frac{6}{10} \times \frac{6}{10}\right) + \left(\frac{6}{10} \times \frac{4}{10}\right) + \left(\frac{4}{10} \times \frac{6}{10}\right)$$

$$= \frac{36}{100} + \frac{24}{100} + \frac{24}{100}$$

$$= \frac{84}{100}$$

යටත් පිරිසෙන් එක් කාඩ්පතක්වත් සුදු පාට කාඩ්පතක් වීමේ සිද්ධිය සැලකීමේ දී එයට නොගැලපෙන්නේ අවස්ථා දෙකේදී ම කහ පාට කාඩ්පතක් ලැබීමේ සිද්ධිය පමණි. එම නිසා අවස්ථා දෙකේදී ම කහ පාට කාඩ්පතක් ලැබීමේ සිද්ධිය A ලෙස ගෙන එහි සම්භාවිතාව සොයා A හි අනුපූරක සිද්ධියේ සම්භාවිතාව සෙවීමෙන් ද ඉහත පිළිතුර ලබා ගත හැකි ය.

$$P(A) = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{100}$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

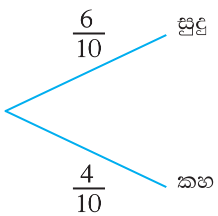
$$= 1 - \frac{16}{100}$$

$$= \frac{100}{100} - \frac{16}{100}$$

$$= \frac{84}{100}$$

මෙම ස්වායත්ත සිද්ධියේ පළමු ගැනීමට අදාළ රුක් සටහන නැවතත් සළකමු.

පළමු ගැනීම



මෙම ශාඛා දෙක මත ඇති සම්භාවිතාවල ඓක්‍යය $= \frac{6}{10} + \frac{4}{10}$

$= 1$

18.2 අභ්‍යාසය

1. බඳුනක රතු පබළු 3ක් සහ සුදු පබළු 2ක් ඇත. ළමයෙකු බඳුනෙන් අහඹු ලෙස පබළුවක් ඉවතට ගෙන එහි වර්ණය සටහන් කරගෙන ආපසු බඳුනට දමා නැවත වරක් බඳුනෙන් අහඹු ලෙස පබළුවක් ඉවතට ගනී.

   (i) නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වන්න.
   (ii) අවස්ථා දෙකේදී ම රතුපාට පබළුවක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
   (iii) අවස්ථා දෙකේදී ම ලැබුණු පබළුවල වර්ණය එකිනෙකට වෙනස් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
   (iv) ඉවතට ගත් පබළු දෙකෙන් අඩු තරමින් එක පබළුවක්වත් රතු පාට එකක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

2. පවුලක සිටින දරුවන් දෙදෙනෙකු පිරිමි හෝ ගැහැණු වීමේ අවස්ථා දැක්වෙන රුක් සටහනක් අඳින්න. ඒ අනුව පහත සිද්ධිවල සම්භාවිතා සොයන්න.

   (i) දරුවන් දෙදෙනා ම ගැහැණු දරුවන් වීම.
   (ii) පළමු දරුවා පිරිමි සහ දෙවන දරුවා ගැහැණු වීම.
   (iii) එක් දරුවෙකු පිරිමි සහ අනෙක් දරුවා ගැහැණු දරුවකු වීම.
   (iv) අඩු තරමින් එක් දරුවෙකුවත් පිරිමි දරුවෙකු වීම.

3. X හා Y කණ්ඩායම් දෙකක් සහභාගීවන තරගයක් වට දෙකකින් පැවැත්වීමට තීරණය කර ඇත. එක වටයක X හෝ Y කණ්ඩායම් දෙකෙන් එකක් අනිවාර්යයෙන් ම ජය ගන්නා අතර එහිදී X ජය ගැනීමේ සම්භාවිතාව $\frac{4}{7}$ ක් බව අත්දැකීමෙන් දනී. කණ්ඩායමක් සමස්ථ තරගය ජය ගැනීමට නම් වට දෙකම ජය ගත යුතු අතර එක වටය බැගින් දිනා ගත් විට ජය පැරදුමෙන් තොර වේ.

   (i) මෙම තරගාවලියේ එක් වටයක දී Y කණ්ඩායම තරගාවලිය ජය ගැනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
   (ii) විය හැකි සියලු ප්‍රතිඵල දැක්වෙන රුක් සටහනක් අඳින්න.
   (iii) තරගයේ ජය X කණ්ඩායමට ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
   (iv) Y කණ්ඩායමට තරගය ජය ගැනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
   (v) තරගය ජය පැරදුමෙන් තොරව අවසන් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

4. එක්තරා බීජ වර්ගයක් ප්‍රරෝහණය සම්භාවිතාව 80% කි. සුරේෂ් මෙම වර්ගයේ බීජ දෙකක් සිටවනු ලැබේ.

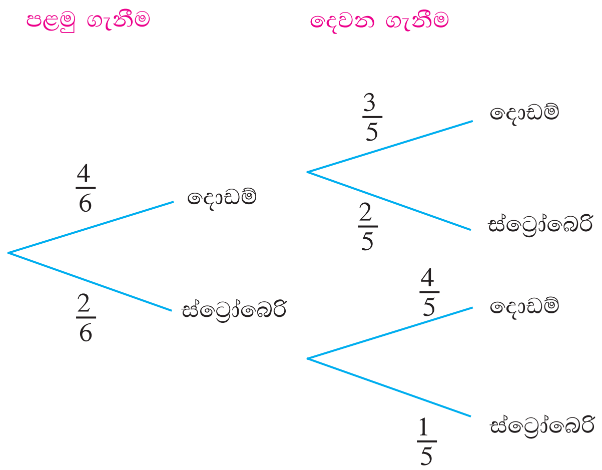
   (i) සුරේෂ් සිටවූ බීජ දෙක පැලවීමේ හා නොවීමේ සියලු අවස්ථා දැක්වෙන රුක් සටහනක් අඳින්න.
   (ii) සිට වූ බීජ දෙක ම පැල වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
   (iii) සිට වූ බීජ දෙක ම පැල නොවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
   (iv) අඩු තරමින් එක බීජයක්වත් පැල වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

5. A භාජනයේ නිල් පෑන් 3ක් සහ කළු පෑන් 2ක් ඇත. B නම් තවත් භාජනයක නිල් පෑන් 4ක් සහ කළු පෑන් 1ක් ඇත. සුපුන් පළමුව A භාජනයෙන් අහඹු ලෙස පෑනක් ඉවතට ගනියි. ඉන්පසුව B භාජනයෙන් තවත් පෑනක් ඉවතට ගනි.

   (i) නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වන්න.
   (ii) භාජන දෙකෙන් ම ඉවතට ගත් පෑන් නිල් පෑන් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
   (iii) A භාජනයෙන් නිල් පෑනක් සහ B භාජනයෙන් කළු පෑනක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
   (iv) ඉවතට ගත් පෑන් දෙකෙන් එකක් නිල් පාට පෑනක් ද අනෙක කළු පාට පෑනක් ද වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

18.4 රුක් සටහන් මගින් ගැටලු විසඳීම (පරායත්ත සිද්ධි)

පෙට්ටියක දොඩම් රස ටොෆි 4ක් සහ ස්ට්‍රෝබෙරි රස ටොෆි 2ක් ඇත. අහඹු ලෙස ළමයෙකු මෙම පෙට්ටියෙන් ටොෆියක් ඉවතට ගෙන එය රස බලා නැවත වරක් පෙට්ටියෙන් අහඹු ලෙස තවත් ටොෆියක් ගෙන එය ද රස බලයි. මෙයට අදාළ නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක පහත පරිදි නිරූපණය කළ හැකි ය.



මෙම රුක් සටහන මගින් පහත සිද්ධිවල සම්භාවිතාව සොයන ආකාරය සලකා බලමු.

අවස්ථා දෙකේදී ම දොඩම් රස ටොෆි ලැබීමේ සම්භාවිතාව

$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{30}$

අවස්ථා දෙකේදී ම ස්ට්‍රෝබෙරි රස ටොෆි ලැබීමේ සම්භාවිතාව

$\frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{30}$

ඉවතට ගත් ටොෆි දෙකෙන් එකක් දොඩම් රස ද අනෙක ස්ට්‍රෝබෙරි රස ද වීමේ සම්භාවිතාව

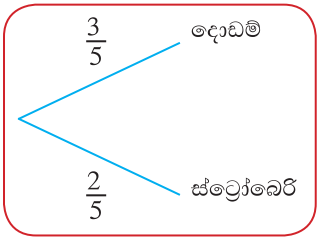
$\left(\frac{4}{6} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{6} \times \frac{4}{5}\right)$

$= \frac{8}{30} + \frac{8}{30}$

$= \frac{16}{30}$

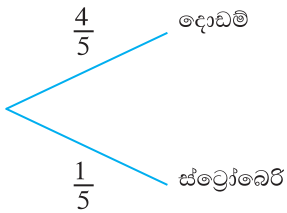
මෙම පරායත්ත සිද්ධියේ දෙවන ගැනීමට අදාළ රුක් සටහන නැවතත් සළකමු.

දෙවන ගැනීම



මෙහි වෙන් කර දක්වා ඇති ශාඛාව මත ඇති සම්භාවිතාවල එකතුව $= \frac{3}{5} + \frac{2}{5}$

$= 1$



සටහන

රුක් සටහනක එක තැනකින් බෙදෙන ශාඛා මත ඇති සම්භාවිතාවල එකතුව 1 විය යුතු ය.

18.3 අභ්‍යාසය

1. රාක්කයක් උඩ ඇති පොත් ගොඩක එක සමාන වූ තනි රූල් පොත් 3ක් සහ කොටු රූල් පොත් 2ක් ඇත. ශිෂ්‍යයෙකු මෙයින් අහඹු ලෙස පොතක් ඉවතට ගෙන එය ආපසු නොතබා තවත් පොතක් ඉවතට ගනියි.
   (i) ලැබිය හැකි නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වන්න.
   (ii) ඉවතට ගත් පොත් දෙක ම තනි රූල් පොත් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
   (iii) ඉවතට ගත් පොත් දෙක ම කොටු රූල් පොත් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
   (iv) ඉවතට ගත් පොත් දෙකෙන් එකක් තනි රූල් හා අනික කොටු රූල් පොතක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

2. ලංගම බස් රථයක් සහ පුද්ගලික බස් රථයක් එක ළඟ නවතා ඇත. ලංගම බස් රථයේ පිරිමි 6ක් සහ ගැහැණු 4ක් සිටි. පුද්ගලික බස් රථයේ පිරිමි 3ක් සහ ගැහැණු 2ක් සිටි. අහඹු ලෙස ලංගම බස් රථයෙන් බැස යන අයෙක් පුද්ගලික බස් රථයට ගොඩ වෙයි. ඉන් අනතුරුව පුද්ගලික බස් රථයෙන් ද අහඹු ලෙස අයෙකු බැස යයි. බස් රථ දෙකෙන් බැස ගිය දෙදෙනා පිරිමි හෝ ගැහැණු වීමේ සියලු අවස්ථා දැක්වෙන රුක් සටහනක් අඳින්න. ඒ ඇසුරින් පහත සිද්ධිවල සම්භාවිතාව සොයන්න.
   (i) ලංගම බස් රථයෙන් බැස ගිය කෙනා ගැහැණු අයෙකු වීම
   (ii) බස් රථ දෙකෙන්ම ගැහැණු අයෙකු බැස යාම
   (iii) යටත් පිරිසෙන් බැස ගිය එක් අයෙකුවත් පිරිමි අයෙකු වීම

3. එක්තරා බීජ වර්ගයක් පැලවීමේ සම්භාවිතාව 80 % ක් බව ද පැළ වූ බීජයකින් එල හට ගැනීමේ සම්භාවිතාව 60 %ක් බව ද දී ඇත. මේ අනුව බීජයක් පැළවීම හා එහි එල හට ගැනීමේ සියලු අවස්ථා දැක්වෙන රුක් සටහනක් අඳින්න. එය ඇසුරින් පහත සිද්ධිවල සම්භාවිතාව සොයන්න.

   (i) බීජයක් පැළ නොවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
   (ii) බීජයක් පැළ වුවද එල හට නොගැනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

4. එක්තරා පරිගණක පාඨමාලාවක් සඳහා සුදුස්සන් තෝරා ගැනීමට පළමුව ලිඛිත පරීක්ෂණයකට ද ඉන් පසුව ප්‍රායෝගික පරීක්ෂණයකට ද පෙනී සිටිය යුතු ය. පාඨමාලාව සඳහා සුදුසුකම් ලැබීමට නම් පරීක්ෂණ දෙකෙන් ම සමත් විය යුතු ය. ලිඛිත පරීක්ෂණය අසමත් සිසුන් ප්‍රායෝගික පරීක්ෂණය සඳහා යොමු කරනු නොලැබේ. අපේක්ෂකයෙකු ලිඛිත පරීක්ෂණය සමත් වීමේ සම්භාවිතාව $\frac{5}{8}$ ක් ද ප්‍රායෝගික පරීක්ෂණය සමත් වීමේ සම්භාවිතාව $\frac{3}{4}$ ක් ද වේ.

   (i) මෙම පාඨමාලාවට ඉල්ලුම් කළ අපේක්ෂකයෙකු අහඹු ලෙස තෝරා ගත් විට විය හැකි සිද්ධි ඇතුළත් නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වන්න.
   (ii) සිසුවා පාඨමාලාව සඳහා සුදුසුකම් ලබන අයෙකු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

සාරාංශය

- සසම්භාවී පරීක්ෂණයකදී එක් සිද්ධියක සිදුවීම තවත් සිද්ධියක සිදුවීම කෙරෙහි බලපෑම් නොකරයි නම් එම සිද්ධි දෙක ස්වායත්ත සිද්ධි ලෙස හඳුන්වයි. A හා B ස්වායත්ත සිද්ධි දෙකක් විට, $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$ වේ.
- සසම්භාවී පරීක්ෂණයකදී එක් සිද්ධියක සිදුවීම, තවත් සිද්ධියක සිදුවීම කෙරෙහි බලපෑමක් ඇතිකරයි නම් එම සිද්ධි දෙක පරායත්ත සිද්ධි ලෙස හඳුන්වයි.

19 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩි

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,

- සංඛ්‍යා අනුක්‍රම අතරින් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩි වෙන් කර හඳුනා ගැනීමට,
- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක n වන පදය ගොඩ නැඟීමට හා එහි භාවිතයට,
- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක මුල් පද nහි ඓක්‍යය ගොඩ නැඟීම හා එහි භාවිතයට,
- සමාජයේ තිබෙන යම් යම් ගැටලු විසඳීම සඳහා ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩි යොදා ගැනීමේ

හැකියාව ලැබේ.

4 ශ්‍රේණියේ දී ඉගෙන ගත් සමාන්තර ශ්‍රේඩි පිළිබඳ ලබා ගත් දැනුම පුනරීක්ෂණයට පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන සංඛ්‍යා අනුක්‍රම අතරින් සමාන්තර ශ්‍රේඩි තෝරා ලියන්න.

(i) 5, 7, 9, 11, ... (ii) 1, 2, 4, 8, ... (iii) 1, 4, 9, 16, ...

(iv) 20, 16, 12, 8, ... (v) $2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 7, ...$ (vi) 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, ...

2. පහත දැක්වෙන සමාන්තර ශ්‍රේඩිවල මුල් පදය (a), පොදු අන්තරය (d) සොයන්න.

(i) 9, 14, 19, 24, ... (ii) 20, 17,14, 11, ...

(iii) 3.8, 4.4, 5, 5.6, ... (iv) $3\frac{1}{4}, 5\frac{1}{2}, 7\frac{3}{4}, 10, ...$

3. 3, 5, 7, 9, ... සමාන්තර ශ්‍රේඩියේ 12 වන පදයත් මුල් පද 12හි ඓක්‍යයත් සොයන්න.

4. 3 වන පදය 7ද 8 වන පදය 12ද වන සමාන්තර ශ්‍රේඩියේ,

(i) මුල් පදය හා පොදු අන්තරය සොයන්න. (ii) 16 වන පදය සොයන්න.

(iii) 52 වන්නේ කී වන පදය ද? (iv) මුල් පද 20හි ඓක්‍යය සොයන්න.

19.1 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩි

අප මීට පෙර සමාන්තර ශ්‍රේඩි පිළිබඳ ව දැනුම ලබා ගත්තෙමු. දැන් අපි තවත් විශේෂිත වූ සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයක් පිළිබඳ විමසමු.

- 1, 3, 9, 27, ... මෙම අනුක්‍රමය ගොඩනැඟී ඇත්තේ පෙර පදය 3න් ගුණ කර පසු පදය ලැබෙන ආකාරයෙනි.
- 64, 32, 16, 8, ... මෙම අනුක්‍රමය ගොඩනැඟී ඇත්තේ පෙර පදය 2න් බෙදූ විට පසු පදය ලැබෙන ආකාරයෙනි.
- 5, −10, 20, −40, ... මෙම අනුක්‍රමය ගොඩනැඟී ඇත්තේ පෙර පදය (− 2)න් ගුණ කර පසු පදය ලැබෙන ආකාරයෙනි.

ඉහත දැක් වූ සංඛ්‍යා අනුක්‍රම තුනෙහි ම ඇති විශේෂිත ලක්ෂණය කුමක් ද?

මෙම අනුක්‍රමයන්හි මුල් පදය හැර ඕනෑ ම පදයක් ඊට පෙර පදයෙන් බෙදූ විට නියත අගයක් ලැබේ.

මෙවැනි සංඛ්‍යා ශ්‍රේඪියක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් ලෙස හඳුන්වන අතර මේ නියත අගය පොදු අනුපාතය ලෙස හඳුන්වයි.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය a ද පොදු අනුපාතය r ලෙස ද සංකේතවත් කරයි.

නිදසුන 1

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් දැයි පරීක්ෂා කිරීම.

සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය	පදය	ඊට පෙර පදය	අනුපාතය	ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් වේ/ නොවේ.
3, 6, 12, 24, ...	6	3	$\frac{6}{3} = 2$	ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියකි.
	12	6	$\frac{12}{6} = 2$	
	24	12	$\frac{24}{12} = 2$	
600, 300, 150, 75, ...	300	600	$\frac{300}{600} = \frac{1}{2}$	ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියකි.
	150	300	$\frac{150}{300} = \frac{1}{2}$	
	75	150	$\frac{75}{150} = \frac{1}{2}$	
2, 4, 8, 14, ...	4	2	$\frac{4}{2} = 2$	ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් නොවේ.
	8	4	$\frac{8}{4} = 2$	
	14	8	$\frac{14}{8} = \frac{7}{4}$	
1, −3, 9, −27, ...	−3	1	$\frac{-3}{1} = -3$	ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියකි.
	9	−3	$\frac{9}{-3} = -3$	
	−27	9	$\frac{-27}{9} = -3$	

නිදසුන 2

මුල් පදය 5ද පොදු අනුපාතය 2ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියේ මුල් පද 4 ලියන්න.

$5, (5 \times 2), (5 \times 2 \times 2), (5 \times 2 \times 2 \times 2), ...$

$5, 10, 20, 40$

නිදසුන 3

මුල් පදය 1ද පොදු අනුපාතය (-3)ද වන මෙම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියේ මුල් පද 4 ලියන්න.

$1, [1 \times (-3)], [1 \times (-3) \times (-3)], [1 \times (-3) \times (-3) \times (-3)], ...$

$1, -3, 9, -27$

නිදසුන 4

$2, x, 8$ යන පද 3 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක අනුයාතව පිහිටයි නම් මෙම ශ්‍රේඩියේ x හි අගය සොයා එහි මුල් පද 3 ලියා දක්වන්න.

මෙම සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක් නිසා, $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$ වේ.

$\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$ නම්,

$x^2 = 16$

$x^2 - 16 = 0$

$x^2 - 4^2 = 0$

$(x - 4)(x + 4) = 0$ වේ.

එම නිසා, $x - 4 = 0$ හෝ $x + 4 = 0$

$x = 4$ හෝ $x = (-4)$ වේ.

$x = 4$ විට, $2, 4, 8$ යන පොදු අනුපාතය 2 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩිය ලැබේ.

$x = (-4)$ විට, $2, -4, 8$ යන පොදු අනුපාතය (-2) වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩිය ලැබේ.

19.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන සංඛ්‍යා අනුක්‍රම අතරින් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩි තෝරා ලියන්න.

(i) $2, 6, 18, ...$ (ii) $5, 10, 20, ...$ (iii) $2, 4, 6, ...$

(iv) $-5, 10, 15, -25, ...$ (v) $100, 50, 25, 12.5, ...$ (vi) $0.3, 0.6, 1.2, 2.4, ...$

2. පහත ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩිවල මුල් පදය (a) හා පොදු අනුපාතය (r) සොයන්න.

(i) $1, 2, 4, 8, ...$ (ii) $3, 9, 27, 81, ...$ (iii) $4, -8, 16, -32, ...$

(iv) $270, 90, 30, 10, ...$ (v) $3, 0.6, 0.12, 0.024, ...$ (vi) $a^3, 3a^2, 9a, 27, ...$

3. මුල් පදය 5 ද පොදු අනුපාතය 2 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද 4 ලියන්න.

4. මුල් පදය 100 ද පොදු අනුපාතය $\frac{1}{2}$ ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද 4 ලියන්න.

5. 10, y, 40, ... යනු ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත ව පිහිටි පද 3ක් නම් y හි අගය සොයන්න.

19.2 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය

සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයක අනුයාත (එක ළඟ) පද අතර අනුපාතය නියත අගයක් ලැබේ නම් එය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් බව දැන් අපි දනිමු.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය (a) ද පොදු අනුපාතය (r) ද n වන පදය T_n ලෙස ද සංකේතවත් කරයි.

5, 10, 20, 40, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪිය සලකා එහි n වන පදය සොයමු.

පළමු පදය → $T_1 = 5 \times 1 = 5 \times 2^{1-1}$

දෙවන පදය → $T_2 = 5 \times 2 = 5 \times 2^{2-1}$

තුන්වන පදය → $T_3 = 5 \times 2 \times 2 = 5 \times 2^{3-1}$

හතරවන පදය → $T_4 = 5 \times 2 \times 2 \times 2 = 5 \times 2^{4-1}$

$\vdots$

n වන පදය → $T_n = 5 \times 2 \times 2 \times 2 \ldots = 5 \times 2^{n-1}$

මෙම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 5 යනු මුල් පදය (a) ද 2 යනු පොදු අනුපාතය (r) ද වේ.

තව ද අප සංකේතාත්මකව ම සූත්‍රය ලබා ගනිමු. එහි මුල් පදය a ද පොදු අනුපාතය r ද පද ගණන n ද n පදය T_n ද වේ.

$$T_1 = ar^{1-1}$$
$$T_2 = ar^{2-1}$$
$$T_3 = ar^{3-1}$$
$$\vdots$$
$$T_n = ar^{n-1}$$

ලෙස දැක්විය හැකි බව නිරීක්ෂණය කරන්න.

> පළමු පදය a ද පොදු අනුපාතය r ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය, $\boldsymbol{T_n = ar^{n-1}}$ මගින් ලබා දෙයි.

19.3 $T_n = ar^{n-1}$ සූත්‍රය භාවිතය

පළමු පදය (a), පොදු අනුපාතය (r), පද ගණන (n), n වන පදය (T_n) වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් සලකමු. a, r හා n හි අගය දී ඇති විට, එම අගයන් $T_n = ar^{n-1}$ සූත්‍රයට ආදේශ කිරීමෙන් T_n හි අගය සෙවිය හැකි ය.

නිදසුන 1

මුල් පදය 1ද පොදු අනුපාතය 2 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 6 වන පදය සොයන්න.

මෙහි $a = 1, r = 2, n = 6$

$T_n = ar^{n-1}$ ට ඉහත දත්ත ආදේශයෙන්,

$T_6 = 1 \times 2^{6-1}$
$= 1 \times 2^5$
$= 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$= 1 \times 32$
$= 32$

ඉහත ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 6 වන පදය 32 වේ.

නිදසුන 2

2, –6, 18, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 5 වන පදය හා 8 වන පදය සොයන්න.

මෙහි, $a = 2$ ද $r = \frac{-6}{2} = -3$ ද වේ.

(i) **පස්වන පදය සෙවීම.** මෙහි $n = 5$

$T_n = ar^{n-1}$ ට ඉහත දත්ත ආදේශයෙන්,

$T_5 = 2 \times (-3)^{5-1}$
$= 2 \times (-3)^4$
$= 2 \times -3 \times -3 \times -3 \times -3 = 2 \times 81$
$= 162$

(ii) **අටවන පදය සෙවීම.** මෙහි $n = 8$

$T_n = ar^{n-1}$ ට ඉහත දත්ත ආදේශයෙන්,

$T_7 = 2 \times (-3)^{8-1}$
$= 2 \times (-3)^7$
$= 2 \times -3 \times -3 \times -3 \times -3 \times -3 \times -3 \times -3 = 2 \times -2187$
$= -4374$

මෙම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පස්වන පදය 162 ද අටවන පදය – 4374 ද වේ.

නිදසුන 3

64, 32, 16, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 6 වන පදය සොයන්න.

මෙහි $a = 64$ ද $r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$ ද $n = 6$ වේ.

ඉහත දත්ත $T_n = ar^{n-1}$ට ආදේශයෙන්,

$$T_6 = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1}$$
$$= 64 \times \frac{1^5}{2^5}$$
$$= 64 \times \frac{1}{32}$$
$$= 2$$

මෙම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ හයවන පදය 2 වේ.

19.2 අභ්‍යාසය

1. පහත වගුවෙහි හිස්තැන් පුරවන්න.

මුල් පදය	පොදු අනුපාතය	ශ්‍රේඪිය			
		පළමු පදය (T_1)	දෙවන පදය (T_2)	තුන්වන පදය (T_3)	හතරවනපදය (T_4)
a	r	a	ar	ar^2	....
4	2	4	8	16	....
1	3	....	....	....	....
−3	2	....	....	....	....
5	−2	....	....	....	....
81	$\frac{2}{3}$	....	....	....	....
0.1	0.2	....	....	....	....

2. පහත එක් එක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 5 වන පදය $T_n = ar^{n-1}$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් සොයන්න.

(i) 1, 2, 4, ... (ii) 10, 20, 40, ... (iii) 3, − 6, 12, ...

(iv) − 7, 14, − 28, ... (v) 32, 16, 8, ... (vi) 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, ...

(vii) 1, 0.1, 0.01, ... (viii) 0.1, 0.04, 0.016, ...

3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{3}{18}, \ldots$ යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 5 වන පදය හා 7 වන පදය සොයන්න.

4. $\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 6 වන පදය සොයන්න.

5. රෝගයක් මර්දනය සඳහා පළමු මාසයේ රු. 5000ක් ද ඉන්පසු සෑම මාසයක ම ඊට පෙර මාසයේ යෙදූ මුදල මෙන් දෙගුණයක් ද ආදී වශයෙන් මාස කිහිපයක් මුදල් වියදම් කරයි.
   (i) පළමුවන, දෙවන හා තුන්වන මාසවල දී වියදම් කරන ලද මුදල් ප්‍රමාණ පිළිවෙළින් ලියා දක්වන්න.
   (ii) එම වියදම් කළ මුදල් පිළිවෙළින් ලියූ විට කවර ශ්‍රේඪියක පිහිටයි දැයි සඳහන් කර එයට හේතු දක්වන්න.
   (iii) 6 වන මාසයේ දී කොපමණ මුදලක් වියදම් කරයි දැයි ඉහත තොරතුරු අනුව සොයන්න.

19.4 $T_n = ar^{n-1}$ සූත්‍රය ආශ්‍රිත ගැටලු

$T_n = ar^{n-1}$ සූත්‍රය භාවිත කළ ගැටලුවල දී මෙතෙක් අප ගණනය කරන ලදදේ n වන පදය හෙවත් T_n නොදන්නා විටයි. දැන් අප තවදුරටත් මුල් පදය නොදන්නා විට හෝ පොදු අනුපාතය නොදන්නා විට හෝ පද ගණන නොදන්නා විට හෝ ගැටලු විසඳන ආකාරය දැන් විමසා බලමු.

මුල් පදය (a) සෙවීමේ අවස්ථාව

නිදසුන 1

පොදු අනුපාතය 2 ද තුන්වන පදය 32 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය සොයන්න.

මෙහි $r = 2, n = 3, T_3 = 32$

මෙම දත්ත $T_n = ar^{n-1}$ ට ආදේශයෙන්,

$T_3 = a \times 2^{3-1}$

$32 = a \times 2^2$

$32 = 4a$

$\frac{32}{4} = \frac{4a}{4}$

$a = 8$

පොදු අනුපාතය (r) සෙවීමේ අවස්ථාව

නිදසුන 2

පළමු පදය 5 ද 5 වන පදය 405 ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පොදු අනුපාතය සොයා එහි මුල් පද 4 ලියන්න.

මෙහි $a = 5, n = 5, T_5 = 405$

මෙම දත්ත $T_n = ar^{n-1}$ ට ආදේශයෙන්,

$$T_5 = 5 \times r^{5-1}$$

$$405 = 5\, r^{5-1}$$

$$\frac{405}{5} = \frac{5 \times r^4}{5}$$

$$81 = r^4$$

$(\pm 3)^4 = r^4$ (දර්ශක ඉරට්ට වූ විට පාදය සඳහා අගයන් 2ක් පවතී).

$\therefore\; r = 3$ හෝ $r = (-3)$ (දර්ශක සමාන නිසා පාද සමාන වේ).

මෙහි පොදු අනුපාතයට අගය දෙකක් ලැබෙන නිසා ඉහත අවශ්‍යතාවට සරිලන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි 2ක් පවතින බව පෙනේ.

$r = 3$ වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද හතර 5, 15, 45, 135 වේ.

$r = (-3)$ වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද හතර 5, -15, 45, -135 වේ.

නිදසුන 3

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය 21 ද 6 වන පදය $\frac{21}{243}$ ද වේ. එම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයන්න.

මෙහි $a = 21, n = 6, T_6 = \frac{21}{243}$ වේ.

මෙම දත්ත $T_n = ar^{n-1}$ ට ආදේශයෙන්,

$$T_6 = 21 \times r^{6-1}$$

$$\frac{21}{243} = 21 \times r^5$$

$$\frac{21}{243} \times \frac{1}{21} = 21 \times r^5 \times \frac{1}{21}$$

$$\frac{1}{243} = r^5$$

$$\frac{1^5}{3^5} = r^5$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5 = r^5$$

$$r = \frac{1}{3}$$

පද ගණන (n) සෙවීමේ අවස්ථාව

නිදසුන 4

12, (−24), 48, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ (−1536) වන්නේ කීවන පදය ද?

මෙහි, $a = 12$, $r = \frac{-24}{12} = (-2)$, $T_n = (-1536)$ වේ.

මෙම දත්ත $T_n = ar^{n-1}$ට ආදේශයෙන්,

$$(-1536) = 12 \times (-2)^{n-1}$$

$$\frac{(-1536)}{12} = \frac{12 \times (-2)^{n-1}}{12}$$

$$(-128) = (-2)^{n-1}$$

$$(-2)^7 = (-2)^{n-1}$$

$$7 = n-1$$ (පාද සමාන නිසා දර්ශක සමාන වේ.)

$$n - 1 + 1 = 7 + 1$$

$$n = 8$$

∴ (−1536) යනු මෙම ශ්‍රේඪියේ අටවෙනි පදයයි.

මුල් පදය (a) හා පොදු අනුපාතය (r) සෙවීමේ අවස්ථාව

නිදසුන 5

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ දෙවැනි පදය 12 ද පස්වන පදය 324 ද වේ. එහි මුල් පදයත් පොදු අනුපාතයත් සොයන්න.

මෙහි $T_2 = 12$, $T_5 = 324$

$T_2 = 12$

$ar = 12$ ——— ①

$T_5 = 324$

$ar^4 = 324$ ——— ②

පද දෙකක් නොදත් හෙයින් එය විසඳීම සඳහා සමීකරණ දෙකක් ගත යුතු ය. එම සමගාමී සමීකරණ විසඳීමෙන් පද දෙකෙහි අගය සොයා ගත හැකි ය. මෙහි දී සමීකරණ එකක් අනෙක් සමීකරණයෙන් බෙදමු.

② ÷ ①

$$\frac{ar^4}{ar} = \frac{324}{12}$$

$r^3 = 27$

$r^3 = 3^3$

$r = 3$ (දර්ශක සමාන බැවින් පාද සමාන වේ.)

$r = 3$, ① ට ආදේශයෙන්,

$a \times 3 = 12$

$$\frac{a \times 3}{3} = \frac{12}{3}$$

$a = 4$

මෙම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය 4 ද පොදු අනුපාතය 3 ද වේ.

නිදසුන 6

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක හතරවන පදය 8 ද අටවන පදය 128 ද වේ.

(i) මෙම අගයන්ට ගැළපෙන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩී දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.
(ii) එක් එක් ශ්‍රේඩීයේ මුල් පද 5 ලියන්න.

(i) මෙහි $T_4 = 8,\ T_8 = 128$

$T_4 = 8$

$ar^3 = 8$ ——— ①

$T_8 = 128$

$ar^7 = 128$ ——— ②

② ÷ ①,

$\frac{ar^7}{ar^3} = \frac{128}{8}$

$r^4 = 16$

$r^4 = (\pm 2)^4$

$r = \pm 2$ (දර්ශක සමාන බැවින් පාද සමාන වේ.)

මෙහි අර්ථය $r = 2$ හෝ $r = (-2)$ බවයි.

පොදු අනුපාතයට අගයන් දෙකක් ලැබෙන බැවින් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩී දෙකක් පවතී.

(ii)

(*a*) $r = 2$ ① ට ආදේශයෙන්,

$ar^3 = 8$

$a \times (2^3) = 8$

$8a = 8$

$\frac{8a}{8} = \frac{8}{8}$

$a = 1$

$r = 2$ හා $a = 1$ වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩීයේ මුල් පද පහ
1, 2, 4, 8, 16

(*b*) $r = (-2)$ ① ට ආදේශයෙන්,

$ar^3 = 8$

$a \times (-2)^3 = 8$

$-8a = 8$

$\frac{-8a}{-8} = \frac{8}{-8}$

$a = -1$

$r = (-2)$ හා $a = (-1)$ වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩීයේ මුල් පද පහ
–1, 2, –4, 8, –1

19.3 අභ්‍යාසය

1. පොදු අනුපාතය 2 ද හතරවන පදය 32 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය සොයන්න.

2. පොදු අනුපාතය 3 ද පස්වන පදය 81 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය සොයන්න.

3. හතරවන පදය 10 ද පොදු අනුපාතය $\frac{1}{3}$ ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය සොයන්න.

4. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය 12 ද හතරවන පදය 324 ද වේ. ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයන්න.

5. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පස්වන පදය 5 ද පළමු පදය 80 ද වේ. ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයා මුල් පද 4 ලියන්න.

6. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය (–8) ද, තුන්වන පදය (–18) ද වේ. පොදු අනුපාතය සොයා එලෙස පැවතිය හැකි ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් තිබිය හැකි බව පෙන්වන්න.

7. $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 512 වන්නේ කී වන පදය ද?

8. 810, (–270), 90, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ $\left(\frac{-10}{3}\right)$ වන්නේ කී වන පදය ද?

9. දෙවන පදය (–14) ද පස්වන පදය 112 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදයත් පොදු අනුපාතයත් සොයන්න.

10. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක දෙවන පදය (– 128) ද හයවන පදය (– 8) ද වේ.
   (i) මෙම අගයන්ට ගැළපෙන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.
   (ii) එක් එක් ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 4 ලියන්න.

19.5 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද *n* වල ඓක්‍යය

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල පදවල ඓක්‍යය (එකතුව) S යන සංකේතයෙන් දැක්වේ. මේ අනුව මුල් පද n හි ඓක්‍යය S_n වේ. දැන් අප S_n සඳහා සූත්‍රයක් ගොඩනඟන අයුරු විමසා බලමු.
$\boldsymbol{T_n = ar^{n-1}}$ **සූත්‍රය භාවිතය සැලකූ විට,**

$T_1 = a, T_2 = ar, T_3 = ar^2, ..., T_{n-1} = ar^{n-2}, T_n = ar^{n-1}$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_{n-1} + T_n$ වේ. දැන් ඉහත දත්ත මෙහි ආදේශ කරමු.

$$\therefore S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad \text{———} \; (1)$$

අපි දැන් (1) සමීකරණය rගෙන් ගුණ කරමු.

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ar^n \quad \text{———} \; (2)$$

දැන් ② සමීකරණයෙන් ① සමීකරණය අඩු කරමු. එවිට,

$$rS_n - S_n = (ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n) - (a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1})$$
$$= ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n - a - ar - ar^2 - \dots - ar^{n-2} - ar^{n-1}$$

$$S_n(r-1) = ar^n - a$$
$$S_n(r-1) = a(r^n - 1)$$

$$\frac{S_n(r-1)}{(r-1)} = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$$ (දෙපසම $(r-1)$ න් බෙදීමෙන්)

$$\therefore S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)} \quad (r \neq 1)$$

වැදගත්

පොදු අනුපාතයෙහි අගය 1 වුවහොත් මෙම සූත්‍රය භාවිතයට නොගන්න.

ඉහතින් ලද සූත්‍රයේ හරය සහ ලවය (-1)න් ගුණ කළ විට පහත සූත්‍රය ද ලබා ගත හැකි ය.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$ වේ.

S_n සඳහා,

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)} \text{ සහ } S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$ යන සූත්‍ර දෙකෙන් ඕනෑ ම එකක් භාවිත කළ හැකි ය.

පොදු අනුපාතයෙහි අගය 1ට වඩා විශාල අගයක් නම් පහත සූත්‍රය මගින් ගැටලු විසඳීම වඩාත් පහසු ය.

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$$ ($r > 1$ වූ විට)

පොදු අනුපාතයෙහි අගය 1ට වඩා කුඩා අගයක් නම් පහත සූත්‍රය මගින් ගැටලු විසඳීම වඩාත් පහසු ය.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$ ($r < 1$ වූ විට)

නිදසුන 1

7, 14, 28, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයේ මුල් පද 5හි ඓක්‍යය (එකතුව), පද සොයා එකතු කිරීමෙන් හා සූත්‍රය භාවිතයෙන් වෙන වෙන ම සොයන්න.

- මුලින් ම අප පද සොයා පදවල එකතුව ගනිමු.

$T_1 = 7$ ද, $T_2 = 14$ හා $T_3 = 28$ ද ලෙස දී ඇත.

තව ද, $T_4 = 28 \times 2 = 56$ ද, $T_5 = 56 \times 2 = 112$ ද වේ.

$\therefore S_5 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$ ඉහතින් ආදේශය සලකමු.

$= 7 + 14 + 28 + 56 + 112$

$= 217$

- දැන් අප සූත්‍රය භාවිතයෙන් ඓක්‍යය (එකතුව) සොයමු.

මෙහි $r = \frac{14}{7} = 2$ බැවින් ($r > 1$ වේ.)

$\therefore S_n = \frac{a\,(r^n - 1)}{(r - 1)}$ මගින් විසඳීම පහසු ය.

$a = 7, r = 2, n = 5,$ ඉහත සූත්‍රයට ආදේශ කරමු.

$$S_5 = \frac{7\,(2^5 - 1)}{(2 - 1)}$$

$$= \frac{7\,(32 - 1)}{1}$$

$$= 7 \times 31$$

$$= 217$$

මුල් පද පහෙහි ඓක්‍යය 217 වේ.

පද ගණන වැඩිවත් ම සූත්‍රය මගින් ගැටලු විසඳීම පහසු ය.

නිදසුන 2

320, 160, 80, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 6හි ඓක්‍යය සූත්‍රය භාවිතයෙන් සොයන්න.

$a = 320, r = \frac{160}{320} = \frac{1}{2}$, $n = 6$

$r = \frac{1}{2}$ බැවින් ($r < 1$ වේ.) මෙහිදී $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$ සූත්‍රය භාවිත කරමු.

$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$ සූත්‍රයට ඉහත දත්ත ආදේශයෙන්,

$$= \frac{320\,[(1 - (\frac{1}{2})^6)]}{(1 - \frac{1}{2})}$$

$$= \frac{320\,(1 - \frac{1}{64})}{\frac{1}{2}}$$

$$= 320\left(\frac{(64 - 1)}{64}\right) \div \frac{1}{2}$$

$$= 320 \times \frac{63}{64} \times \frac{2}{1}$$

$$= 630$$

ඓක්‍යය සඳහා ලබා ගත් සූත්‍ර දෙකෙහි ම අඥාත (අගය නොදන්නා පද) හතරක් ඇත. ඒවා නම් a, r, n හා S_n ය. මෙම අඥාතවලින් ඕනෑ ම 3ක් දුන් විට ඉතිරි අගය සෙවිය හැකි ය.

නිදසුන 3

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයක පොදු අනුපාතය 4 ද මුල් පද 5හි ඓක්‍යය 682 ද වේ නම් එහි මුල් පදය සොයන්න.

මෙහි $r = 4, n = 5, S_5 = 682$ යන දත්ත $S_n = \dfrac{a\,(r^n - 1)}{(r - 1)}$ සූත්‍රයට ආදේශයෙන්,

$$S_5 = \frac{a\,(4^5 - 1)}{(4 - 1)}$$

$$682 = \frac{a\,(1024 - 1)}{3}$$

$$682 \times \frac{3}{1023} = a \times \frac{1023}{3} \times \frac{3}{1023}$$ (දෙපස ම $\frac{3}{1023}$ න් ගුණ කිරීමෙන්)

$$a = 2$$

එනම්, මුල් පදය 2 වේ.

19.4 අභ්‍යාසය

1. 6, 12, 24, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයේ මුල් පද 6හි ඓක්‍යය, පද සොයා එකතු කිරීමෙන් හා සූත්‍රය භාවිතයෙන් වෙන වෙන ම සොයන්න.

2. 81, 27, 9, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයේ මුල් පද 5හි ඓක්‍යය සූත්‍රය භාවිතයෙන් සොයන්න.

3. 10, 50, 250, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයේ මුල් පද 6හි ඓක්‍යය සූත්‍රය භාවිතයෙන් සොයන්න.

4. 5, −10, 20, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයේ මුල් පද 10හි ඓක්‍යය සොයන්න.

5. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයක මුල් පදය 15ද පොදු අනුපාතය 10 ද වේ. මුල් පද 5හි ඓක්‍යය සොයන්න.

6. මුල් පදය a ද පොදු අනුපාතය 10 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයක මුල් පද 6හි ඓක්‍යය 22222.2 වේ. මෙම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයේ මුල් පදය (a) සොයන්න.

7. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයක පොදු අනුපාතය $\frac{1}{3}$ ද මුල් පද 6හි ඓක්‍යය 3640 ද වේ නම් මුල් පදය සොයන්න.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. 3, 12, 48, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයේ,

(i) මුල් පදය හා පොදු අනුපාතය සොයන්න.
(ii) පස්වන පදය සූත්‍රය භාවිතයෙන් සොයන්න.
(iii) 3072 වන්නේ කී වෙනි පදය ද?
(iv) මුල් පද පහෙහි ඓක්‍යය සොයන්න.

2. $-3, 6, -12, \ldots$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ,

(i) මුල් පදය හා පොදු අනුපාතය සොයන්න.
(ii) හයවන පදය සූත්‍රය භාවිතයෙන් සොයන්න.
(iii) -192 වන්නේ කී වෙනි පදය ද?
(iv) මුල් පද 6හි ඓක්‍යය සොයන්න.

3. පළමු පදය 16 වන අතර දෙවැනි පදය, තුන්වන පදයට වඩා 4කින් විශාල ය. මෙය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියකි. මෙහි,

(i) පොදු අනුපාතය සොයන්න.
(ii) සූත්‍රය භාවිතයෙන් හතරවන පදය සොයන්න.
(iii) මුල් පද පහේ ඓක්‍යය සොයන්න.
(iv) පස්වන පදය, හයවන පදය මෙන් දෙගුණයක් බව පෙන්වන්න.

4. දෙවන පදය 6 ද පස්වන පදය 162 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක,

(i) මුල් පදය හා පොදු අනුපාතය සොයන්න.
(ii) හයවන පදය සොයන්න.
(iii) මුල් පද හයෙහි ඓක්‍යය සොයන්න.

5. පිරිවෙණක සිසුන් විසින් සාදන ලද තොරණක විදුලි බල්බ යොදා ඇත්තේ 5, 20, 80, ... ලෙසට ය.

(i) මෙය කුමන ශ්‍රේඪියක පිහිටයි ද යන්න සඳහා හේතු දක්වන්න.
(ii) මෙහි 7 වන පේළියේ විදුලි බල්බ ගණන කීය ද?
(iii) මුළු පේළි ගණන 7 ක් නම් තොරණ සඳහා අවශ්‍ය වූ මුළු විදුලි බල්බ ගණන කීය ද?

සාරාංශය

- පළමු පදය a ද පොදු අනුපාතය r ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය, $T_n = ar^{n-1}$ මගින් ලබා දෙයි.
- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදවල ඓක්‍යය සෙවීම සඳහා පහත සූත්‍ර භාවිත කළ හැකි ය.

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)} \quad (r > 1 \text{ වූ විට})$$

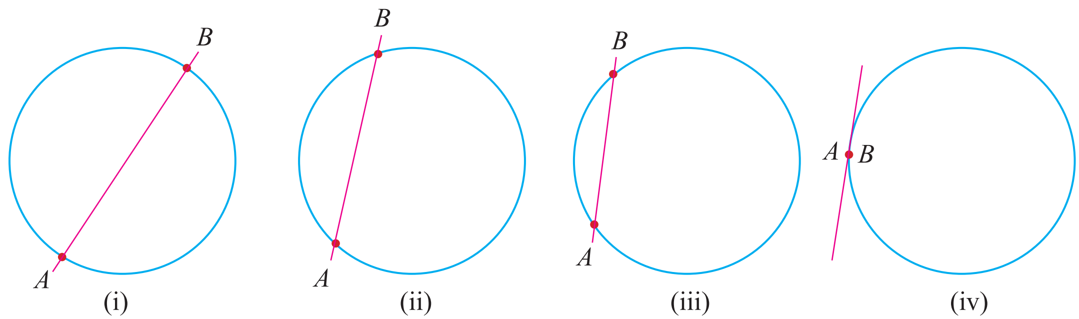
$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1-r)} \quad (r < 1 \text{ වූ විට})$$

20 ස්පර්ශක

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයකදී වෘත්තයට අඳින ලද ස්පර්ශක හා ඒවායේ ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීමට,
- බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට අඳින ලද ස්පර්ශක දෙක හා ඒවායේ ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීමට

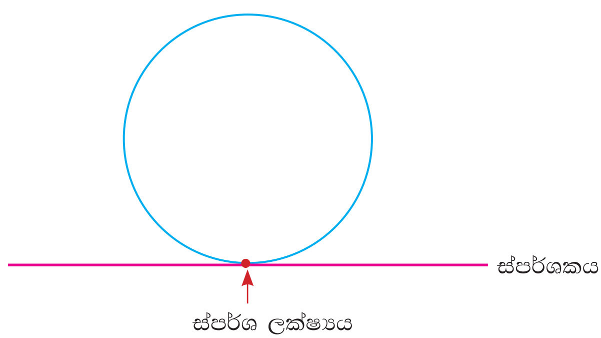
හැකියාව ලැබේ.

20.1 හැඳින්වීම

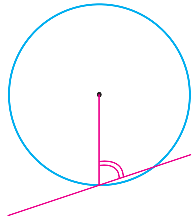


ඉහත (i) සිට (iv) තෙක් රූප සටහන් හොඳින් නිරීක්ෂණය කරන්න. සරල රේඛාව හා වෘත්තයේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යයන් වන A හා B අතර පරතරය ක්‍රමයෙන් අඩු වේ. (iv) වන රූපය වන විට A හා B එකම ලක්ෂ්‍යයක් බවට පත් වේ.

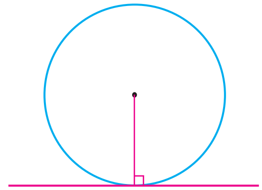
වෘත්තයකට හා සරල රේඛාවකට පොදු ලක්ෂ්‍යය 1ක් පමණක් ඇත්නම් එම සරල රේඛාව වෘත්තය ස්පර්ශ කරන්නේ යැයි කියනු ලැබේ. එවිට සරල රේඛාවට වෘත්තයේ ස්පර්ශකයක් යැයි කියනු ලැබේ. ස්පර්ශයකට හා වෘත්තයකට පොදු ලක්ෂ්‍යය ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය යැයි කියනු ලැබේ.



20.2 වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශකයක් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අරයත් අතර ඇති සබඳතාවය



(i)



(ii)

- (i) රූපයේ වෘත්තයේ අරය හා වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍යයක දී ඇඳි සරල රේඛාවත් අතර සුළු කෝණයක් සෑදෙන විට, එම සරල රේඛාව වෘත්තය දෙතැනක දී ඡේදනය වේ.
- (ii) රූපයේ පරිදි අරය හා වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍යයකදී ඇඳි සරල රේඛාව අතර කෝණය සෘජු කෝණයක් වන විට එම සරල රේඛාව ස්පර්ශකයක් බවට පත් වේ.

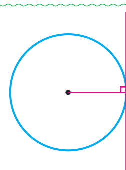
ප්‍රමේයය

වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බකව ඇඳි රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ.

ඉහත පරිදි වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බකව ඇඳි රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වන සේ ම එහි විලෝමය ද සත්‍ය වේ. එනම්, වෘත්තය මත ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයක දී ඇඳි ස්පර්ශකය හා ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අරය එකිනෙකට ලම්බ විය යුතු ය.

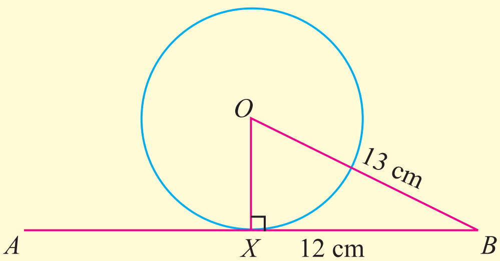
ප්‍රමේයයයේ විලෝමය

වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය, එම ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අරයට ලම්බක වේ.



නිදසුන 1

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත X ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. X හිදී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය AXB වේ. $OB =$ 13 cm හා XB = 12 cm වේ. වෘත්තයේ අරය සොයන්න.



AXB වෘත්තයට ස්පර්ශයක් නිසා,

$O\hat{X}B = 90^{\circ}$ (වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයකදී අඳින ලද ස්පර්ශකය ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේදී ඇඳි අරයට ලම්බ නිසා)

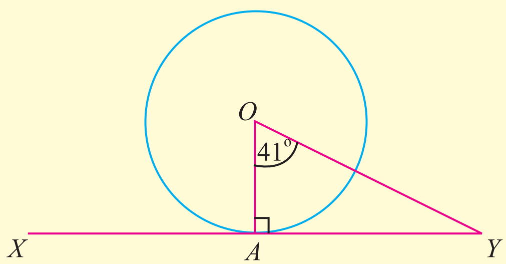
දැන් OXB $\triangle$ ට පයිතගරස් සම්බන්ධය යෙදීමෙන්,

$$OX^2 + XB^2 = OB^2$$
$$OX^2 + 12^2 = 13^2$$
$$OX^2 + 144 = 169$$
$$OX^2 = 169 - 144$$
$$OX^2 = 25$$
$$OX = \sqrt{25}$$
$$OX = 5 \text{ cm}$$

$\therefore$ වෘත්තයේ අරය 5 cm වේ.

නිදසුන 2

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් මත පිහිටි A ලක්ෂ්‍යයකදී ඇඳි ස්පර්ශකය XAY වේ. $A\hat{O}Y = 41^{\circ}$ නම් $A\hat{Y}O$ හි අගය සොයන්න.



XAY වෘත්තයට ස්පර්ශයක් නිසා,

$O\hat{A}Y = 90^{\circ}$ (වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ ඇඳි අරයට ලම්බ වන නිසා)

$A\hat{O}Y = 41^{\circ}$ (දී ඇත.)

$41^{\circ} + 90^{\circ} + O\hat{Y}A = 180^{\circ}$ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණ තුනෙහි එකතුව 180°ක් වේ.)

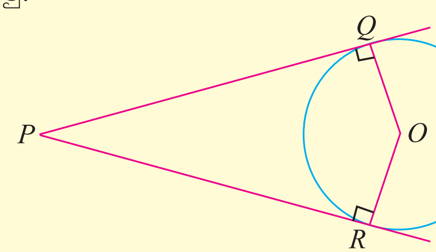
$131^{\circ} + O\hat{Y}A = 180^{\circ}$

$O\hat{Y}A = 180^{\circ} - 131^{\circ}$

$= 49^{\circ}$

නිදසුන 3

$PQOR$ චතුරස්‍රය සළකමු.



$P\hat{Q}O = 90^{\circ}$ (වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ස්පර්ශකය ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ ඇඳි අරයට ලම්බ නිසා)

$P\hat{R}O = 90^{\circ}$ (ඉහත පරිදිම)

$P\hat{Q}O + P\hat{R}O = 90^{\circ} + 90^{\circ}$

$P\hat{R}O + P\hat{R}O = 180^{\circ}$

චතුරස්‍රයක අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව 360°ක් නිසා,

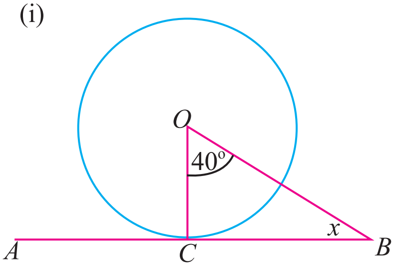
$Q\hat{P}R + Q\hat{O}R = 180^{\circ}$ ක් ද වේ.

$\therefore$ $PQOR$ වෘත්ත චතුරස්‍රයකි. (සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක බැවින්)

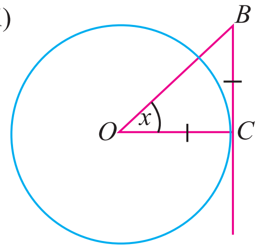
20.1 අභ්‍යාසය

1. පහත එක් එක් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O ද AB යනු වෘත්තය මත පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය ද වේ නම් වීජීය සංකේතවලින් දැක්වෙන අගයන් සොයන්න.

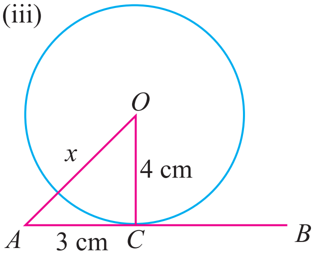
(i)



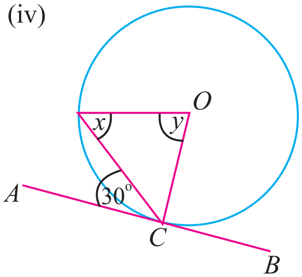
(ii)



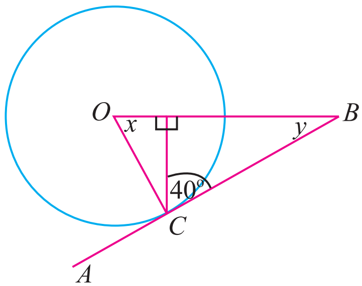
(iii)



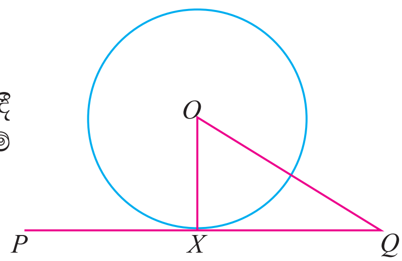
(iv)



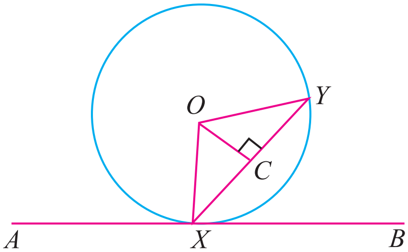
(v)



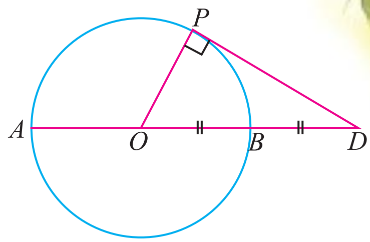
2. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් මත X ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳී ස්පර්ශකය PQ වේ. $OQ = 15$ cm, $XQ = 12$ cm නම් වෘත්තයේ අරය සොයන්න.



3. කේන්ද්‍රය O වූ වෘත්තයක් මත X හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AB වෙයි. රූපයේ පරිදි $XY \perp OC$ නම්, $Y\hat{O}C = B\hat{X}C$ බව සාධනය කරන්න.

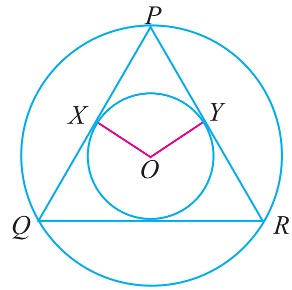


4. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක AB විෂ්කම්භය වේ. $OB = BD$ වන පරිදි AB පාදය D තෙක් දික්කර ඇත. D සිට වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය PD වේ.



(i) O, P, D ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය B බව,
(ii) OPB සමපාද ත්‍රිකෝණයක් බව,
(iii) $B\hat{A}P = 30^0$ බව,
(iv) $PA = PD$ බව
සාධනය කරන්න.

5. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්ත දෙකක් රූපයේ දැක්වේ. PQ හා PR රේඛා X හා Y හිදී කුඩා වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි.



(i) $PX = XQ$ බව,
(ii) PQR සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව,
සාධනය කරන්න.

6. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක XY විෂ්කම්භය වේ. X හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AB වේ. AY රේඛාව, P හිදී වෘත්තය ඡේදනය කරයි.
(i) $X\hat{P}Y = A\hat{X}Y$ බව
(ii) $P\hat{X}Y = X\hat{A}P$ බව
සාධනය කරන්න.

20.3 බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශකය

ක්‍රියාකාරකම 1

පියවර 1 අරය 5 cm වන වෘත්තයක් අඳින්න. එහි කේන්ද්‍රය O ලෙස නම් කරන්න.

පියවර 2 රූපයේ පරිදි වෘත්තය මත A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ලකුණු කර OA හා OB යා කරන්න.

පියවර 3 කෝණමානය භාවිතයෙන් OA ට හා OB ට ලම්බ වන පරිදි සරල රේඛාවක් අඳින්න.

පියවර 4 එම සරල රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය P ලෙස නම් කර යා කරන්න.

පියවර 5 AP, BP, $A\hat{O}P$, $B\hat{O}P$, $A\hat{P}O$, $B\hat{P}O$ මැන අගය සොයන්න.

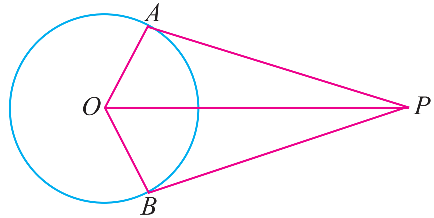
විවිධ වෘත්ත අඳිමින් ඉහත ක්‍රියාකාරකම සිදු කරමින් ලබා ගත හැකි නිගමන මොනවාදැයි සොයා බලන්න.

ඉහත සොයා ගත් සම්බන්ධතා පහත පරිදි ප්‍රමේයයක් ලෙස ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයය

බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශ දෙකක් අඳිනු ලැබේ නම්,
(i) ස්පර්ශක දෙක දිගින් සමාන වේ.
(ii) බාහිර ලක්ෂ්‍යය හා වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය යා කරන රේඛාව ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණය සමච්ඡේදනය කරයි.
(iii) ස්පර්ශක මගින් කේන්ද්‍රයේ සමාන කෝණ ආපාතනය කරයි.

ඉහත ප්‍රමේයය පහත පරිදි විධිමත්ව සාධනය කළ හැකි ය.



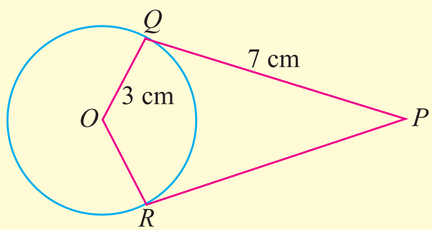
දත්තය : O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට P බාහිර ලක්ෂ්‍යයේ සිට A හා B හිදී ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් PA හා PB වේ.

සාධනය කළ යුත්ත : (i) $AP = BP$ බව
(ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$ බව
(iii) $P\hat{O}A = P\hat{O}B$ බව

සාධනය : POA හා POB $\triangle$ වල,
$OA = OB$ (එකම වෘත්තයක අර සමාන වේ.)
$OP = OP$ (පොදු පදය)
$O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^{o}$ (ස්පර්ශක අරයට ලම්බක නිසා)
$\therefore AOP \triangle \equiv POB \triangle$ (කර්ණ පා අවස්ථාව)
අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සැලකීමෙන්,
(i) $AP = BP$ වේ.
(ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$ වේ.
(iii) $P\hat{O}A = P\hat{O}B$ වේ.

නිදසුන 1

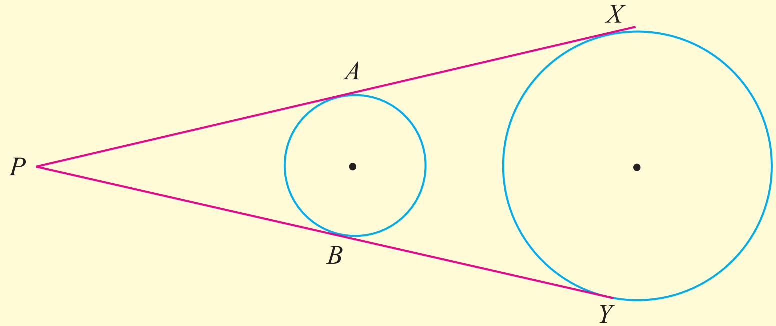
O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයකට P බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශකය PQ හා PR වේ. $PQ = 7$ cm, $OQ = 3$ cm නම් $OQPR$ රූපයේ පරිමිතිය සොයන්න.



$PR = PQ$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට අඳින ලද ස්පර්ශක දිගින් සමාන නිසා)
$PR = 7$ cm
$OQPR$ පරිමිතිය $= 3$ cm $+ 7$ cm $+ 7$ cm $+ 3$ cm
$= 20$ cm

නිදසුන 2

දී ඇති රූපයේ PAX හා PBY යනු වෘත්ත දෙකට ම පොදු ස්පර්ශක 2කි. $AX = BY$ බව සාධනය කරන්න.



දත්තය : PAX හා PBY යනු වෘත්ත දෙකටම පොදු ස්පර්ශක 2කි.

සාධනය කළ යුත්ත : $AX = BY$ බව

සාධනය : බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට අඳින ස්පර්ශක දිගින් සමාන නිසා,

$PX = PY$ ——— (1)

$PA = PB$ ——— (2)

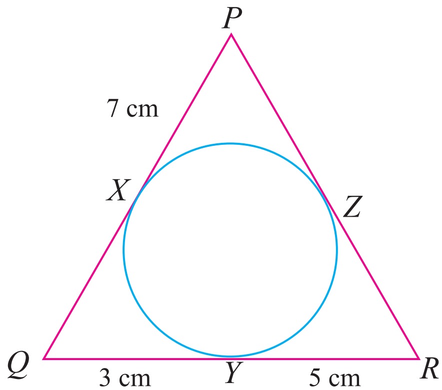
(1) − (2),

$PX - PA = PY - PB$

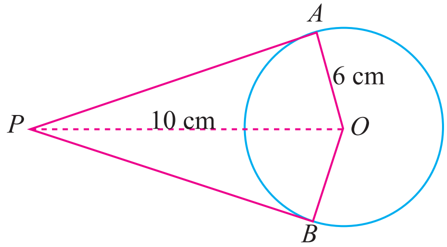
$AX = BY$

20.2 අභ්‍යාසය

1. රූපයේ PQ, QR, PR පිළිවෙළින් වෘත්තය මත X, Y, Z හිදී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. $PX = 7$ cm, $QY = 3$ cm, $YR = 5$ cm නම් PQR ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.

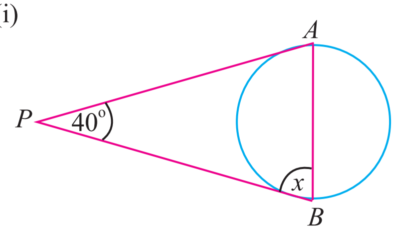


2. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක P බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක 2ක් PA හා PB වේ. $OA = 6$ cm, $PO = 10$ cm නම් $OAPB$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයන්න.

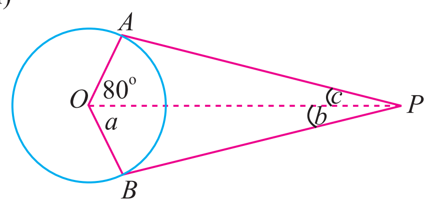


3. වීජීය පදවලින් දැක්වෙන කෝණවල අගය සොයන්න. PA හා PB ස්පර්ශක වන අතර වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ.

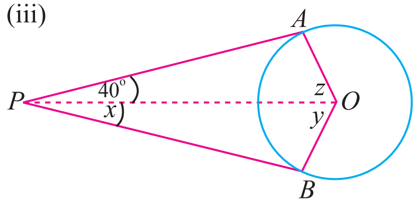
(i)



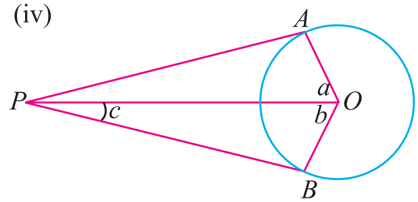
(ii)



(iii)

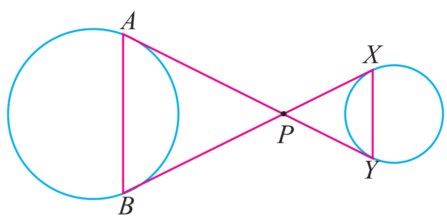


(iv)



$A\hat{P}B = 60^\circ$ කි.

4. රූපයේ AY හා BX යනු වෘත්ත දෙකට ම පොදු ස්පර්ශක වේ. AY හා BX රේඛා P හිදී ඡේදනය වේ. AB // XY බව සාධනය කරන්න.



5. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයකට බාහිරින් පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක PA හා PB වේ. PO හා AB සරල රේඛා X හිදී ඡේදනය වේ.

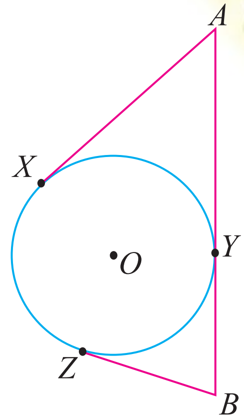
(i) $AXP\,\Delta \equiv BXP\,\Delta$ බව,

(ii) AB හා PO ලම්බක බව,

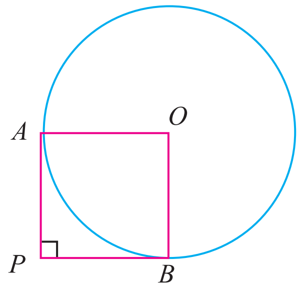
(iii) $A\hat{O}B = 2P\hat{A}B$ බව

සාධනය කරන්න.

6. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයකට Y හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AB වේ. A හා B හිදී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් AX හා BZ වේ. $AX + ZB = AB$ බව සාධනය කරන්න.



7. රූපයේ O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයකට P බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක PA හා PB වේ. $A\hat{P}B = 90^{\circ}$ නම් $OAPB$ සමචතුරස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.



සාරාංශය

- වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බකය ඇඳි රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ.
- වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයකදී අඳින ලද ස්පර්ශකය, එම ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේදී ඇඳි අරයට ලම්බක වේ.
- බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශ දෙකක් අඳිනු ලැබේ නම්,
  - ස්පර්ශක දෙක දිගින් සමාන වේ.
  - බාහිර ලක්ෂ්‍යය හා වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය යා කරන රේඛාව ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණය සමච්ඡේදනය කරයි.
  - ස්පර්ශක මගින් කේන්ද්‍රයේ සමාන කෝණ ආපාතනය කරයි.

21 ජ්‍යාමිතික නිර්මාණ

මෙහි දී ඔබ 1, 2, 3, 4 ශ්‍රේණිවල දී උගත් ජ්‍යාමිතික නිර්මාණයන් සිහිපත් කරමු.

21.1 මූලික පථ අවස්ථා

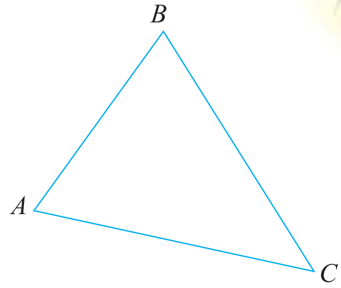
- අචල ලක්ෂ්‍යයක සිට නියත දුරකින් තලයක චලනය වන ලක්ෂ්‍යයක පථය සෑම විට ම වෘත්තයකි.
- අචල ලක්ෂ්‍ය දෙකකට සම දුරකින් චලනය වන ලක්ෂ්‍යයක පථය වන්නේ එම ලක්ෂ්‍ය දෙක යා කරනු ලබන රේඛා ඛණ්ඩයේ ලම්බ සමච්ඡේදකයේ ගමන් මාර්ගයයි.
- සරල රේඛා ඛණ්ඩයකට නියත දුරකින් චලනය වන ලක්ෂ්‍යයක පථය එම රේඛාවට දෙපසින් පිහිටියා වූ සමාන්තර සරල රේඛා දෙකකි.
- එකිනෙකට සමාන්තර නොවන සරල රේඛා දෙකකට සමදුරින් පිහිටන ලක්ෂ්‍යයන්ගේ පථය වනුයේ එම රේඛා දෙක හමුවන ලක්ෂ්‍යයේ දී සෑදෙන කෝණයේ, කෝණ සමච්ඡේදකයේ ගමන් මාර්ගයයි.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. (i) පාදයක දිග 6 cmක් වූ සමපාද ත්‍රිකෝණයක් නිර්මාණය කර ශීර්ෂ P, Q, R ලෙස නම් කරන්න.
   (ii) ඉහත ත්‍රිකෝණයේ ඕනෑ ම කෝණ දෙකක සමච්ඡේදක නිර්මාණය කර ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය O ලෙස නම් කරන්න.
   (iii) O හි සිට ඕනෑ ම පාදයකට ලම්බකයක් නිර්මාණය කරන්න.
   (iv) O හි සිට පාදයකට ඇති ලම්බ දුර අරය ලෙස ද O කේන්ද්‍රය ලෙස ද ගෙන වෘත්තයක් අඳින්න.
   (v) එම වෘත්තය මගින් ඉතිරි පාද දෙක ස්පර්ශ කරන්නේ දැයි සොයා බලන්න.

2. ඔබ කැමති ත්‍රිකෝණයක් ඇඳ එය ABC යැයි නම් කරන්න. එහි,
   (i) ABට සමාන්තරව C හරහා ද
   (ii) ACට සමාන්තරව B හරහා ද
   (iii) BCට සමාන්තරව A හරහා ද සමාන්තර රේඛා නිර්මාණය කර ලැබෙන ත්‍රිකෝණය $A_1B_1C_1$ ලෙස නම් කරන්න.

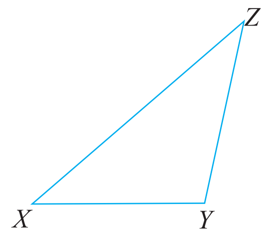
3. රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයේ ත්‍රිකෝණයක් ඇඳ එහි,



(i) A හා B ලක්ෂ්‍යවලට සමදුරින් යන ලක්ෂ්‍යයන්ගේ පථය නිර්මාණය කරන්න.
(ii) B හා C ලක්ෂ්‍යවලට සමදුරින් යන ලක්ෂ්‍යයන්ගේ පථය නිර්මාණය කරන්න.
(iii) ඉහත පථ දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය O යැයි නම් කර O හි සිට AC සිට පාදයට ලම්බකයක් නිර්මාණය කර AC හමුවන ලක්ෂ්‍යය X යැයි නම් කර දක්වන්න.
(iv) O ලක්ෂ්‍යයේ සිට එක් එක් ශීර්ෂයට ඇති දුර මැන ලියන්න.

4. සුළු කෝණික ත්‍රිකෝණයක් ඇඳ එය PQR යැයි නම් කරන්න. මෙම ත්‍රිකෝණයේ,
(i) $P\hat{Q}R$ හි සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කරන්න.
(ii) $Q\hat{P}R$ හි සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කරන්න.
(iii) ඉහත සමච්ඡේදක දෙක හමුවන ලක්ෂ්‍යය O යැයි නම් කර O හි PQ සිට පාදයට ලම්බකයක් නිර්මාණය කර PQ හමුවන ලක්ෂ්‍යය Y යැයි නම් කරන්න.
(iv) OY දුර මැන ලියන්න.

5. දී ඇති රූපයේ,



(i) XZ රේඛාවට සමාන්තර රේඛාවක් Y හරහා නිර්මාණය කරන්න.
(ii) $Z\hat{X}Y$ හි සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කරන්න. ඉහත (i) හි ඇඳි සමාන්තර රේඛාව එයට හමුවන පරිදි දික් කරන්න. එම ලක්ෂ්‍යය O යැයි නම් කරන්න.

6. $AB = 6.5$ cm, $BC = 7$ cm සහ $A\hat{B}C = 60^\circ$, ABC වන ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න. එනයින්,
(i) AC හි දිග කොපමණ ද?
(ii) $B\hat{C}A$ හි සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කරන්න.
(iii) AC පාදයට සමාන්තරව B හරහා රේඛාවක් අඳින්න.
(iv) ඉහත කෝණ සමච්ඡේදකය සහ සමාන්තර රේඛාව හමුවන ලක්ෂ්‍යය D යැයි නම් කර $ADBC$ චතුරස්‍රය ලබා ගන්න.

7. $AB = 6.5$ cm, $B\hat{A}C = 90^\circ$, $AC = 7$ cm වන ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
(i) ඉහත ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C$ සමච්ඡේදකය සහ $B\hat{A}C$ සමච්ඡේදක නිර්මාණය කරන්න.
(ii) ඉහත සමච්ඡේදක දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය O යැයි නම් කර O හි සිට AB පාදයට ලම්බකයක් නිර්මාණය කර AB හමුවන ලක්ෂ්‍යය X ලෙස නම් කරන්න.
(iii) ඉහත O ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍රය ලෙස ද OX දුර අරය ලෙස ද ගෙන වෘත්තයක් නිර්මාණය කරන්න.
(iv) එහි අරය සහ එම වෘත්තය ABC ත්‍රිකෝණයේ කිනම් වෘත්තය දැයි දක්වන්න.

8. $PQ = 4.5$ cm, $P\hat{Q}R = 60^{\circ}$, $QR = 4$ cm වන PQR ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.

(i) PQට නියත දුරකින් R හරහා යන ලක්ෂ්‍යයන්ගේ පථය නිර්මාණය කරන්න.

(ii) ඉහත පථය මත $RS = 3.5$ cm වන පරිදි S ලකුණු කර $PQRS$ චතුරස්‍රය ලබා ගන්න.

(iii) ඉහත චතුරස්‍රයට දිය හැකි නම කුමක් ද?

(iv) ඉහත චතුරස්‍රයේ P හා Q ලක්ෂ්‍යවලට සහ Q සහ R හා ලක්ෂ්‍යවලට සමදුරින් යන ලක්ෂ්‍යයන්ගේ පථ නිර්මාණය කර දක්වන්න.

(v) ඉහත පථ දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය O යැයි නම් කර O කේන්ද්‍රය ලෙස ද එහි සිට PQR ත්‍රිකෝණයේ ශීර්ෂවලට ඇති දුර අරය ලෙස ද ගෙන වෘත්තයක් නිර්මාණය කරන්න.

(vi) එහි අරය සහ එම වෘත්තය PQR ත්‍රිකෝණයේ කුමන වෘත්තය ලෙස හැඳින්විය හැකි දැයි දක්වන්න.

9. $AB = 6.5$ cm, $A\hat{B}C = 60^{\circ}$, $AC = 8$ cm වන ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.

(i) $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි D පිහිටීම ලබා ගන්න.

(ii) ACD ත්‍රිකෝණයේ ශීර්ෂ හරහා යන වෘත්තය නිර්මාණය කර එහි අරය ලියන්න.

10. $AB = 6$ cm, $A\hat{B}C = 45^{\circ}$ ද වන $ABCD$ රොම්බසය නිර්මාණය කරන්න.

(i) A හා B ලක්ෂ්‍යවලට සමදුරින් යන ලක්ෂ්‍යයන්ගේ පථය නිර්මාණය කරන්න.

(ii) B හා C ලක්ෂ්‍යවලට සමදුරින් යන ලක්ෂ්‍යයන්ගේ පථය ද නිර්මාණය කරන්න.

(iii) ඉහත පථ දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය O යැයි නම් කරන්න.

(iv) ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.

(v) එම වෘත්තයේ අරය කොපමණ ද?

11. (i) $PQ = 3.5$ cm, $P\hat{Q}R = 60^{\circ}$, $QR = 5$ cm වන PQR ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.

(ii) ඉහත ත්‍රිකෝණයේ P හා R ලක්ෂ්‍යවලට සමදුරින් යන ලක්ෂ්‍යයක පථය නිර්මාණය කරන්න.

(iii) ඉහත ත්‍රිකෝණයේ PQට නියත දුරකින් වූ R හරහා යන ලක්ෂ්‍යයන්ගේ පථය ද නිර්මාණය කරන්න.

(iv) ඉහත (ii) හා (iii) හි දී ඇඳි පථ දෙක හමුවන ලක්ෂ්‍යය S යැයි නම් කර $PQRS$ චතුරස්‍රය ලබා ගන්න.

(v) PS හි දිග කොපමණ ද?

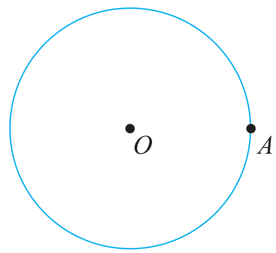
(vi) PQR ත්‍රිකෝණයේ අන්තර් වෘත්තය නිර්මාණය කර එහි අරය ලියන්න.

21.2 වෘත්ත ස්පර්ශක නිර්මාණය

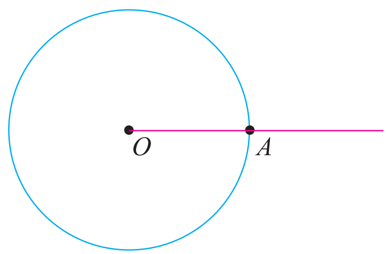
වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍යයකදී වෘත්තයකට ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කිරීම

වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයකදී අරයට ලම්බකව ඇඳි රේඛාව, එම වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ යන ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍යයකදී ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කිරීම සඳහා පහත පියවර අනුගමනය කරන්න.

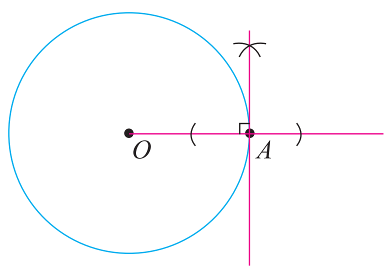
පියවර 1 - වෘත්තයක් ඇඳ වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න. කේන්ද්‍රය O ලෙස නම් කරන්න.



පියවර 2 - O සහ A ලක්ෂ්‍ය හරහා යන සරල රේඛාවක් අඳින්න.

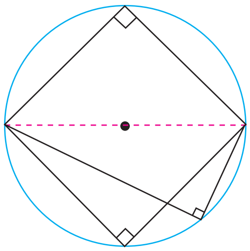


පියවර 3 - A හිදී OA ට ලම්බකයක් නිර්මාණය කරන්න. එම ලම්බකය A හිදී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය වේ.



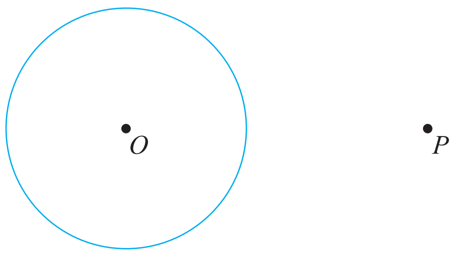
බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කිරීම

බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක නිර්මාණය කිරීමේදී, අර්ධ වෘත්තයේ කෝණය සෘජු කෝණයක් වන බව දැන සිටීම ඉතා වැදගත් වේ.

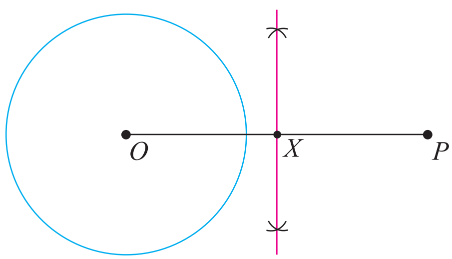


ඉහත දැක් වූ ප්‍රමේයය යොදා ගනිමින් බාහිර ලක්ෂ්‍යක සිට ස්පර්ශක නිර්මාණය කරන අයුරු පහත පියවර ඔස්සේ ගොඩ නගමු.

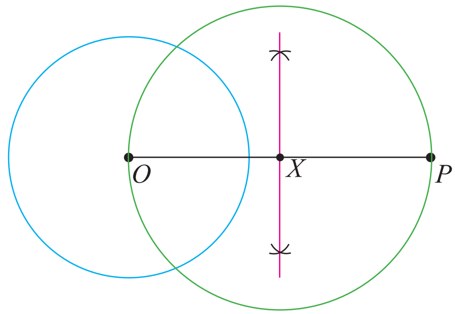
පියවර 1 - O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් ඇඳ වෘත්තයට පිටතින් P නම් ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න.



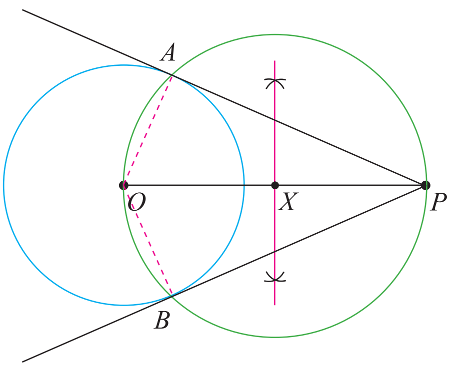
පියවර 2 - OP යා කර OPහි ලම්බ සමච්ඡේදකය ඇඳ එම ලම්බ සමච්ඡේදකය OP ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය X ලෙස ලකුණු කරන්න.



පියවර 3 - XO දුර අරය ලෙස ද X කේන්ද්‍රය ලෙස ද ගෙන O හා P හරහා යන වෘත්තය අඳින්න.



පියවර 4 - වෘත්ත දෙකක ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය A හා B ලෙස ලකුණු කර PA හා PB යා කරන්න.



එවිට PA හා PB මගින් P සිට O කේන්ද්‍රය වන වෘත්තයට අඳින ලද ස්පර්ශක දෙක ලැබේ.

සටහන

- මෙම ස්පර්ශක දෙකෙහි දිග සමාන වේ. එනම්, $PA = PB$ වේ.
- OP මගින් ස්පර්ශක අතර කෝණය සමච්ඡේදනය වේ. එනම්, $A\hat{P}O = B\hat{P}O$ වේ.
- AP හා BP මගින් කේන්ද්‍රයේ සමාන කෝණ ආපතනය වේ.
  එනම්, $A\hat{O}P = B\hat{O}P$ වේ.

21.1 අභ්‍යාසය

1. (i) අරය 4 cm වූ වෘත්තයක් අඳින්න.
   (ii) එම වෘත්තය මත P නම් ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න.
   (iii) Pහි දී එම වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් අඳින්න.

2. (i) අරය 5.5 cm වූ වෘත්තයක් අඳින්න. කේන්ද්‍රය O ලෙස ලකුණු කරන්න.
   (ii) එම වෘත්තය මත AB විෂ්කම්භය අඳින්න.
   (iii) A හිදී එම වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් අඳින්න.

3. (i) AB = 6 cm, AC = 4.2 cm, BC = 5.5 cm වන ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) A සිට 4 cm ක් දුරින් AB මත D නම් ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න.
   (iii) D සිට ABට ලම්බයක් නිර්මාණය කරන්න.
   (iv) D සිට AB ට ඇඳි ලම්බකය BC හමුවන ලක්ෂ්‍යය O ලෙස ලකුණු කරන්න.
   (v) O කේන්ද්‍රය ලෙස ගෙන Dහි දී AB ස්පර්ශ වන පරිදි වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.

4. (i) අරය 3 cm වූ වෘත්තය අඳින්න. කේන්ද්‍රය A ලෙස ලකුණු කරන්න.
   (ii) A සිට 7 cmක් දුරින් වෘත්තයට පිටතින් ඕනෑ ම B ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න.
   (iii) B සිට A කේන්ද්‍රය වන වෘත්තයට ඇඳිය හැකි ස්පර්ශක දෙක නිර්මාණය කරන්න.

5. (i) AB = 7 cm, $A\hat{B}C = 60^{o}$, BC = 6 cm වන ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) $A\hat{C}B$ යේ සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කරන්න.
   (iii) C සිට 4 cm දුරින් BC මත D ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න.
   (iv) D හිදී BC පාදය ස්පර්ශ කරන $A\hat{C}B$ හි සමච්ඡේදකය මත කේන්ද්‍රය O ලෙස ගෙන වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
   (v) Bහි සිට වෘත්තයට ඇඳිය හැකි අනෙක් ස්පර්ශකය නිර්මාණය කරන්න.

6. (i) PQ = 6.2 cm ද $Q\hat{P}R = 75^{o}$ ද PR = 5.3 cm වන PQR ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) Q හා R හරහා යන්නා වූ ද Q හිදී PQ ස්පර්ශ වන්නා වූ ද වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
   (iii) එම වෘත්තයේ අරය මැන ලියන්න.